ÖMO

Österreichische MathematikOlympiade

Grundlagen

der

Geometrie

14. 11. 2008

Birgit Vera Schmidt

1 Wiederholung

1.1 Grundlagen

1.1.1 Strecken und Verbindungen

Eine Strecke ist eine Verbindung zwischen zwei Punkten. Eine Strecke hat einen Anfangs- und einen Endpunkt (wobei man aber der Einfachheit halber oft beide als Endpunkte bezeichnet). Seien A und B die beiden Endpunkte einer Strecke, dann bezeichnet man die Strecke mit AB .

1.1.2 Geraden und Strahlen

Eine Gerade entsteht, wenn man eine Strecke in beide Richtungen verlängert (theoretisch bis ins Unendliche, praktisch bis zum Papierrand). Liegt die Strecke AB auf einer Geraden g , so nennt man diese Gerade die Trägergerade von AB .

Verlängert man eine Strecke nur in eine Richtung, entsteht ein Strahl. Alternativ kann man einen Strahl auch definieren als die von einem Punkt in eine bestimmte Richtung ausgehende Linie.

1.1.3 Winkel

Der Winkel misst den „Unterschied" zweier Richtungen. Blickt man zuerst in eine Richtung, muss man sich um einen bestimmten Winkel drehen, um in die andere Richtung zu sehen. 0° bedeutet, dass man sich gar nicht bewegt, 360° ist eine volle Umdrehung. Eine halbe Drehung (sodass man genau in die entgegengesetzte Richtung blickt wie zuvor) entspricht somit 180°. Nach einer 90°-Drehung hat man sich in diejenige Richtung gedreht, die zuvor seitlich war.

Zur Schreibweise: Seien A , B und C drei Punkte. Der Winkel in A zwischen den Strecken AB und AC wird als $\sphericalangle BAC$ bezeichnet. Der mittlere Buchstabe entspricht also dem Punkt, in dem der Winkel gemessen wird, die Punkte links und rechts entsprechen Punkten auf den beiden von dem Punkt ausgehenden Linien, zwischen denen der Winkel gemessen wird.

1.1.4 Rechter Winkel

Einen Winkel von 90° bezeichnet man als rechten Winkel. Dieser hat viele besondere Eigenschaften. Schließen zwei Linien einen rechten Winkel ein, so sagt man auch, sie stehen normal aufeinander.

1.1.5 Normale

Eine Gerade, die auf eine andere Gerade normal steht, bezeichnet man als Normale auf diese Gerade.

1.1.6 Abstand zweier Punkte

Seien A und B zwei Punkte. Die Länge der Strecke AB bezeichnet man meist mit $\overline{AB}$. Diese Länge entspricht dem Abstand der beiden Punkte, weswegen man auch diesen Abstand mit der gleichen Schreibweise bezeichnet.

1.1.7 Abstand eines Punktes zu einer Geraden, Normalabstand, Höhe

Nehmen wir an, man möchte den Abstand eines Punktes P zu einer Geraden g messen. Je nachdem, zu welchem Punkt auf der Geraden man misst, erhält man unterschiedliche Resultate. Den sogenannten Normalabstand erhält man, indem man durch P eine Normale auf die Gerade g legt. Der Schnittpunkt dieser Normalen mit der Geraden wird als Fußpunkt bezeichnet, die Verbindung zwischen Fußpunkt und P als Höhe oder Normalabstand.

Von allen möglichen Abständen zwischen P und g ist der Normalabstand der kürzeste. Spricht man vom Abstand eines Punktes zu einer Geraden, so meint man daher im Allgemeinen diesen Abstand.

1.1.8 Parallelität

Haben zwei Geraden die gleiche Richtung, so nennt man sie parallel.

1.1.9 Schnittpunkte von Geraden und Abstand zwischen Geraden

Zwei nicht parallele Geraden schneiden einander in genau einem Punkt, den man als Schnittpunkt bezeichnet. Parallele Geraden schneiden einander entweder gar nicht, oder sie sind identisch.

Seien g und h zwei parallele Geraden, dann hat jeder Punkt auf g denselben Normalabstand zu h (und ebenso umgekehrt jeder Punkt auf h denselben Normalabstand zu g). Diesen Abstand bezeichnet man daher auch als Abstand zwischen den parallelen Geraden

1.1.10 Streckenmittelpunkt

Sei AB eine Strecke. Der Mittelpunkt M ist derjenige Punkt, der die Strecke halbiert, also von A und B gleich weit entfernt ist und auf der Strecke liegt.

1.1.11 Streckensymmetrale

Sei AB eine Strecke. Die Streckensymmetrale ist jene Gerade, die die Strecke AB genau halbiert und normal darauf steht. Sie enthält genau jene Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind. Der Streckenmittelpunkt liegt daher auf der Streckensymmetrale.

Zur Konstruktion: Man wähle einen Abstand $r > \frac{\overline{AB}}{2}$ und konstruiere mit dem Zirkel die zwei Kreise k_a und k_b mit A und B als Mittelpunkten und Radius r. Diese Kreise haben zwei Schnittpunkte, S und S ‘. Beide Punkte sind von A und von B je r entfernt. Daher liegen sie auf der Streckensymmetrale. Man verbinde S und S ‘ und verlängere die so erhaltene Strecke um die Streckensymmetrale zu erhalten.

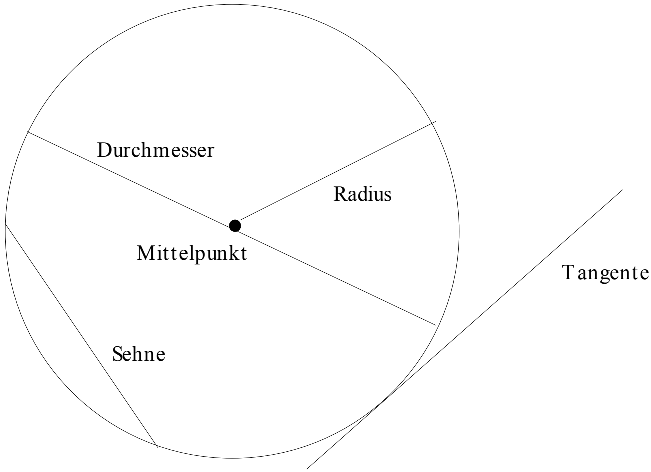
1.1.12 Winkelsymmetrale

Seien g und h zwei Geraden, die einander im Punkt S schneiden und den Winkel α einschließen. Die Winkelsymmetrale ist jene Gerade, die den Winkel halbiert, d.h. die durch S geht und sowohl zu g als auch zu h einen Winkel von $\alpha/2$ einschließt. Die Winkelsymmetrale enthält genau jene Punkte, die von g und h gleich weit entfernt sind bezüglich des Normalabstandes.

Zur Konstruktion: Man bestimme zwei Punkte A und B auf g und h, die von S gleich weit entfernt sind. Dann bestimme man analog zur oben beschriebenen Methode einen Punkt S ‘, der von A und B gleich weit entfernt ist, und verbinde S und S ‘ um die Winkelsymmetrale zu erhalten.

1.2 Kreis

Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem bestimmten Punkt, dem sogenannten Mittelpunkt, gleich weit entfernt sind.



1.2.1 Mittelpunkt und Radius

Derjenige Punkt, von dem alle anderen gleich weit entfernt sind, heißt Mittelpunkt und wird oft mit dem Buchstaben M bezeichnet. Die Entfernung der anderen Punkte zum Mittelpunkt wird als Radius bezeichnet. Gleichzeitig bezeichnet man auch eine Verbindung zwischen dem Mittelpunkt und einem Punkt auf dem Kreis als Radius.

1.2.2 Sehne und Durchmesser

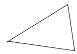
Sei k ein Kreis und seien A und B zwei Punkte auf diesem Kreis. Die Verbindung zwischen diesen beiden Punkten heißt Sehne. Eine Sehne, die durch den Mittelpunkt des Kreises geht, heißt Durchmesser.

1.2.3 Tangente, Sekante und Passante

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie eine Gerade im Verhältnis zu einem Kreis liegen kann. Eine Passante geht vollständig außen am Kreis vorbei, wohingegen eine Sekante durch den Kreis geht und diesen in zwei Punkten schneidet. Eine Tangente ist eine Gerade, die den Kreis in genau einem Punkt berührt. Sie schließt mit dem Radius durch den Berührpunkt einen rechten Winkel ein.

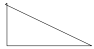
1.3 Dreieck

1.3.1 Spezielle Dreiecke



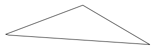
Spitzwinkeliges Dreieck

Ein Dreieck heißt spitzwinkelig, wenn alle drei Winkel < 90° sind.



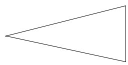
Rechtwinkeliges Dreieck

Ein Dreieck heißt rechtwinkelig, wenn es einen rechten Winkel enthält. Die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt Hypotenuse.



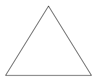
Stumpfwinkeliges Dreieck

Ein Dreieck heißt stumpfwinkelig, wenn es einen Winkel > 90° enthält.
Jedes Dreieck kann höchstens einen Winkel >= 90° enthalten.



Gleichschenkeliges Dreieck

Ein Dreieck heißt gleichschenkelig, wenn zwei Seiten (Schenkel) gleich lang sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn mindestens zwei Winkel gleich groß sind.



Gleichseitiges Dreieck

Ein Dreieck heißt gleichseitig, wenn alle drei Seiten gleich lang sind. Alle drei Winkel in einem gleichseitigen Dreieck betragen genau 60°.

Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge s : Man zeichne eine Strecke der Länge s . Über den Endpunkten der Strecke errichte man Kreise mit dem Radius s . Diese schneiden einander in zwei Punkten. Jeder dieser Punkte ist von beiden Endpunkten genau s entfernt und damit gültiger dritter Punkt für ein gleichseitiges Dreieck. Genau so kann man übrigens einen 60°-Winkel konstruieren.

1.3.2 Winkelsumme im Dreieck

Die drei Winkel eines Dreiecks ergänzen sich immer auf 180°.

1.3.3 Umkreis

Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Der Umkreis ist jener Kreis, auf dem die drei Eckpunkte A , B und C liegen. Es gibt genau einen solchen Kreis. Der Umkreismittelpunkt U ist der Mittelpunkt dieses Kreises, der Radius wird als Umkreisradius bezeichnet.

Da U von allen drei Eckpunkten gleich weit entfernt ist, muss U sowohl auf der Streckensymmetrale von AB als auch auf denen von BC und CA liegen. Entsprechend wird U auch konstruiert.

U kann außerhalb des Dreiecks ABC liegen, und zwar genau dann, wenn ABC ein stumpfwinkeliges Dreieck ist. Bei einem rechtwinkeligen Dreieck liegt U auf der Hypotenuse.

1.3.4 Inkreis

Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Der Inkreis ist jener Kreis, der vollständig im Inneren des Dreiecks liegt und alle drei Seiten berührt. Der Inkreis ist damit gleichzeitig der größte der vollständig im Dreieck liegenden Kreise. Der Mittelpunkt wird als Inkreismittelpunkt I bezeichnet, der Radius als Inkreisradius.

Der Inkreis berührt alle drei Seiten, der Mittelpunkt muss daher also von allen Seiten gleich weit entfernt sein. I liegt daher auf allen drei Winkelsymmetralen. Auch hier erfolgt die Konstruktion entsprechend. I muss logischerweise immer innerhalb des Dreiecks liegen.

1.3.5 Höhe und Höhenschnittpunkt

Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Als Höhe h_a von A auf BC bezeichnet man die Normale auf die Strecke BC durch den Punkt A . Die Höhe stellt damit die kürzeste Verbindung von A zur Strecke BC dar. Der Schnittpunkt mit BC wird als Fußpunkt der Höhe bezeichnet.

Die Bezeichnung „Höhe“ wird auf zweierlei Arten verwendet, nämlich einerseits als Bezeichnung für die beschriebene Verbindung, andererseits als Bezeichnung für die Länge derselben.

Die Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, der als Höhenschnittpunkt H bezeichnet wird. Dieser kann außerhalb des Dreiecks liegen, und zwar genau dann, wenn das Dreieck stumpfwinkelig ist. (In diesem Fall bezeichnet man den Schnittpunkt der Verlängerungen der Höhen als Höhenschnittpunkt.)

1.3.6 Schwerlinie und Schwerpunkt

Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Die Verbindung eines Seitenmittelpunktes mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt nennt man Schwerlinie. Die drei Schwerlinien eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, der Schwerpunkt S genannt wird. Der Schwerpunkt ist jener Punkt, auf dem man ein Dreieck balancieren könnte (wenn man eine gleichmäßige Verteilung der Masse voraussetzt). Der Schwerpunkt teilt jede Schwerlinie im Verhältnis 2:1, und liegt immer innerhalb des Dreiecks.

1.3.7 Fläche

Die Fläche eines Dreiecks berechnet sich aus Grundlinie mal Höhe (auf die gewählte Grundlinie) Halbe, d.h. $A=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$. Alternativ dazu kann man Fläche auch berechnen als Inkreisradius mal halbem Umfang, also $A=\rho\cdot\frac{(a+b+c)}{2}$. Die Fläche eines Dreiecks ABC wird gelegentlich als $[ABC]$ angeschrieben.

1.4 Viereck

1.4.1 Winkelsumme im Viereck

Die vier Winkel eines Vierecks ergeben zusammen immer 360°.

1.4.2 Umkreis

Als Umkreis bezeichnet man einen Kreis, der alle vier Eckpunkte enthält. So ein Kreis muss nicht immer existieren.

1.4.3 Inkreis

Als Inkreis bezeichnet man einen Kreis, der vollständig innerhalb des Vierecks liegt und alle vier Seiten berührt. Auch der Inkreis muss nicht immer existieren.

1.4.4 Diagonale

Als Diagonale bezeichnet man die Verbindung zweier gegenüberliegender Eckpunkte.

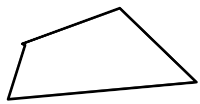
1.4.5 Fläche

Für die Fläche eines Vierecks gibt es keine allgemeine Flächenformel. Man kann die Fläche aber immer berechnen, indem man das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, und die Flächen dieser Dreiecke addiert.

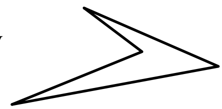
1.4.6 Konkav und konvex

Liegen beide Diagonalen innerhalb des Vierecks, so nennt man das Viereck konvex. Liegt eine der Diagonalen außerhalb, so nennt man das Viereck konkav.

konvex

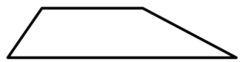


konkav



1.4.7 Spezielle Vierecke

Trapez

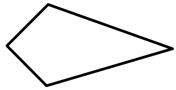


Ein Trapez ist ein Viereck, in dem zwei Seiten parallel sind. Die Fläche eines Trapezes lässt sich berechnen als $A=\frac{(a+c)}{2}\cdot h$, wobei a und c die beiden parallelen Seiten sind und h der Abstand zwischen diesen Seiten (bzw. die Höhe des Trapezes).

Sind die beiden Innenwinkel an einer der parallelen Seiten gleich groß, so spricht man von einem gleichschenkeligen Trapez. Ein solches besitzt eine Symmetrieachse, daher sind auch die beiden nicht parallelen Seiten gleich lang. Ein Trapez besitzt genau dann einen Umkreis, wenn es gleichschenkelig ist.

Achtung: Nicht jedes Trapez, bei dem die beiden zusätzlichen Seiten gleich lang sind, ist automatisch ein gleichschenkeliges Trapez. Es könnte sich auch um ein Parallelogramm handeln.

Deltoid (Drachenviereck)



Sei ABCD ein Viereck. Wenn gilt, dass $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $\overline{CB} = \overline{CD}$, bezeichnet man das Viereck als Deltoid. Die Diagonale AC ist gleichzeitig die Symmetrieachse des Vierecks. Sie halbiert daher die andere Diagonale. Außerdem sind die Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle CDA$ gleich groß. Jedes Deltoid besitzt einen Inkreis.

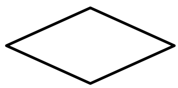
Die Fläche eines Deltoids lässt sich auch berechnen als $A = \frac{e \cdot f}{2}$, wobei e und f die Längen der beiden Diagonalen sind.

Parallelogramm

Sind in einem Viereck gegenüberliegende Seiten zueinander parallel, so spricht man von einem Parallelogramm. In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang. Es gilt auch umgekehrt, dass jedes Viereck, in dem gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, ein Parallelogramm ist. Die Diagonalen in einem Parallelogramm halbieren einander, gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

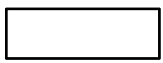
Jedes Parallelogramm ist ein gleichzeitig ein Trapez. Da die beiden parallelen Seiten gleich lang sind, vereinfacht sich die Flächenformel zu $A = a \cdot h_a$.

Raute



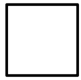
Eine Raute ist ein Viereck, in dem alle vier Seiten gleich lang sind, und somit ein Sonderfall von Parallelogramm und Deltoid. Die Diagonalen schließen einen rechten Winkel ein.

Rechteck



Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit vier rechten Winkeln. Jedes Rechteck hat einen Umkreis. Die Fläche eines Rechteckes kann man berechnen als $A = a \cdot b$.

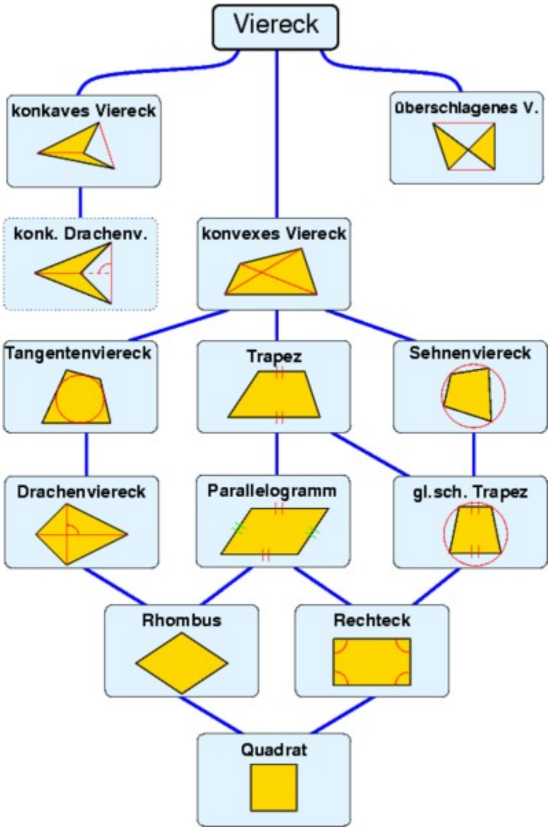
Quadrat



Ein Quadrat ist ein Viereck, das aus vier gleich langen Seiten besteht, die normal aufeinander stehen. Ein Quadrat ist also gleichzeitig eine Raute und ein Rechteck. Die Fläche eines Quadrates beträgt $A=a^2$.

Hierarchie

Unter den speziellen Vierecken herrscht eine gewisse Hierarchie. Ein Quadrat ist ein Sonderfall eines Rechteckes, ein Rechteck ein Sonderfall eines Parallelogramms, und so weiter. Die vollständige Hierarchie ist auf dieser Seite abgebildet.[1] Sehnen- und Tangentenvierecke werden wir in Abschnitt 4 genauer betrachten; für den Moment genügt es zu sagen, dass ein Sehnenviereck ein Viereck mit Umkreis ist (also aus vier Sehnen besteht); ein Tangentenviereck ist ein Viereck, das einen Inkreis besitzt (und sich somit aus Teilstücken von vier Tangenten zusammensetzt).



1 Grafik von Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Viereck-Hierarchie.png

1.5 Polygon

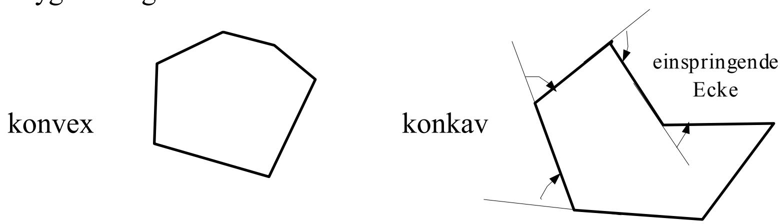
Ein Polygon besteht aus mehreren Strecken, die eine Fläche umschließen. Diese Strecken werden meist Kanten genannt, die Punkte, an denen sie zusammenstoßen, heißen Ecken. Dreiecke und Vierecke sind spezielle Polygone

1.5.1 Außenwinkel

Der Außenwinkel einer Ecke ist jener Winkel, um den sich die Richtung zwischen den beiden zusammenstoßenden Kanten ändert.

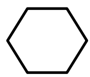
1.5.2 Konkav und Konvex

Ein Polygon heißt konkav, wenn es einspringende Ecken hat. Äquivalent dazu kann man sagen, dass ein Polygon genau dann konkav ist, wenn es eine Verbindung zwischen zwei Eckpunkten gibt, die nicht vollständig innerhalb des Polygons liegt.



1.5.3 Regelmäßige Polygone

Ein konvexes Polygon, bei dem alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind, nennt man regelmäßiges Polygon. Jedes regelmäßige Polygon besitzt Um- und Inkreis.



1.5.4 Winkelsumme

Würde man mit einem kleinen Auto am Rand eines Polygons entlangfahren, so müsste man an jeder Ecke eine Kurve machen, die dem Außenwinkel entspricht. Da das Auto nach einer ganzen Runde wieder in die selbe Richtung blickt wie am Start, muss die Summe der Außenwinkel 360° betragen.

Jeder Innenwinkel beträgt 180° abzüglich dem dazugehörigen Außenwinkel (wobei dieser negativ sein kann). Die Summe der Innenwinkel ist daher von der Anzahl der Ecken abhängig. Ein Polygon mit n Ecken hat eine Innenwinkelsumme von $n \cdot 180° - 360°$.

2 Grundlagen und Notation

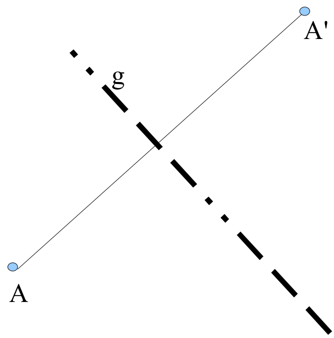
2.1 Spiegelung

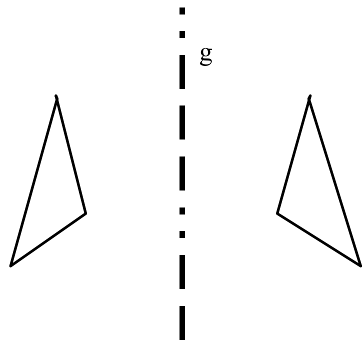
2.1.1 Spiegelung an einer Geraden

Sei A ein Punkt und g eine Gerade. Wenn man A an g spiegelt, erhält man einen Punkt A', der von g gleich weit entfernt ist wie A und auf der Normalen auf g durch A liegt.

Liegt ein Punkt auf g selbst, so fällt er mit seinem eigenen Spiegelbild zusammen. Geraden bleiben bezüglich einer Spiegelung Geraden, Kreise bleiben Kreise, alle Winkel und Längen bleiben unverändert (wobei bei den Winkeln genaugenommen die Orientierung umgekehrt wird.)

Zur Konstruktion: Man zeichne die Normale auf g durch den Punkt A ein. Sei F der Schnittpunkt mit g. Man trägt den Abstand $\overline{AF}$ auf der Normalen ab, sodass $\overline{FA'}=\overline{AF}$.



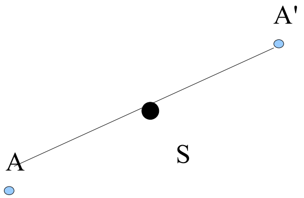


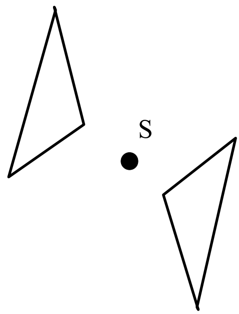
2.1.2 Spiegelung an einem Punkt

Sei S der Punkt, an dem gespiegelt werden soll, und A ein beliebiger anderer Punkt. Man erhält den gespiegelten Punkt A', der dem Punkt A bezüglich S genau gegenüber liegt und gleich weit von S entfernt ist.

Auch bezüglich der Spiegelung an einem Punkt bleiben Geraden, Kreise, Längen und Winkel unverändert. Eine Punktspiegelung entspricht eigentlich genau einer Drehung um 180° mit dem Punkt S als Rotationszentrum.

Zur Konstruktion: Man verlängere die Strecke AS und trage darauf die Distanz $\overline{AS}$ ab, und zwar so, dass der erhaltene Punkt A' dem Punkt A gegenüber liegt.



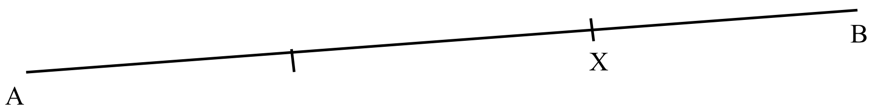


2.2 Teilverhältnisse

Seien AB und CD zwei Strecken. Die Längen dieser Strecken kann man nun zueinander in Relation setzen. Als Schreibweise verwendet man meist $\overline{AB}:\overline{CD}$. Dies kann mit einer Zahl, einem Bruch oder einer weiteren Relation zwischen zwei Strecken gleichgesetzt werden.

$\overline{AB}:\overline{CD}=2:1$ bedeutet beispielsweise, dass die Strecke AB doppelt so lange ist wie die Strecke CD . Ein Verhältnis von $1:1$ würde bedeuten, dass die Strecken gleich lang sind. Das Verhältnis muss nicht immer ein ganzzahliges Vielfaches sein. Ein Verhältnis von $3:5$ bedeutet beispielsweise, dass die zweite Strecke $5/3$ mal so lang ist wie die erste. Die Streckenlängen verhalten sich zueinander also wie 3 zu 5 .

Sei AB eine Strecke. Die Aussage, dass ein Punkt X die Strecke im Verhältnis $2:1$ teilt, bedeutet, dass der Teil links des Punktes X in diesem Fall doppelt so groß ist wie der Teil rechts des Punktes, also $\overline{XA}:\overline{XB}=2:1$. Insgesamt besteht die Strecke daher aus drei gleich langen Teilen, von deinen einer rechts und zwei links des Punktes X liegen. Zum Einzeichnen eines solchen Punktes muss man die Strecke daher dritteln.



Wäre das Verhältnis beispielsweise $3:5$, so würde man die Strecke in 8 Teile teilen, von denen 3 links und 5 rechts des Punktes X liegen.

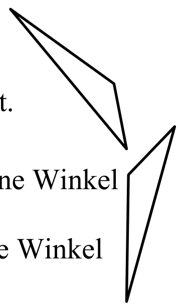
2.3 Kongruente Dreiecke

Zwei Dreiecke heißen kongruent (oder deckungsgleich), wenn sie die gleiche Form und Größe haben, wenn man also eines der Dreiecke so verschieben und spiegeln kann, dass es genau über dem anderen liegt. Zwei kongruente Dreiecke haben daher natürlich gleich große Winkel und gleich lange Seiten.

Formal ausgedrückt: Sei ABC ein Dreieck. Ein Dreieck heißt kongruent zu ABC, wenn man seine Punkte derart als A', B' und C' beschriften kann, dass gilt: $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, $\overline{BC}=\overline{B'C'}$ und $\overline{CA}=\overline{C'A'}$.

2.4 Kongruenzsätze

Es gibt mehrere Wege, Kongruenz zwischen zwei Dreiecken nachzuweisen. Zwei Dreiecke sind unter anderem dann kongruent, wenn (gleich groß bzw. gleich lang bezieht sich immer auf die entsprechende Seite im anderen Dreieck):

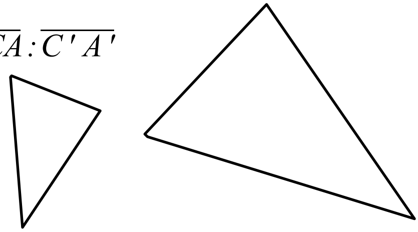


- Alle drei Seitenlängen gleich groß sind.
- Alle drei Winkel gleich groß und eine Seite gleich lang ist.
- Zwei Winkel gleich groß und eine Seite gleich lang ist.
- Zwei Seiten und der von den beiden Seiten eingeschlossene Winkel gleich groß sind.
- Zwei Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel gleich groß sind.

2.5 Ähnliche Dreiecke

Haben zwei Dreiecke die gleichen Winkel, aber möglicherweise unterschiedliche Größen, so nennt man sie ähnlich. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn einer er obigen Kongruenzsätze zutrifft, aber auch bereits, wenn

- Alle drei Winkel gleich groß sind.
- $\overline{AB} : \overline{A'B'} \;=\; \overline{BC} : \overline{B'C'} \;=\; \overline{CA} : \overline{C'A'}$

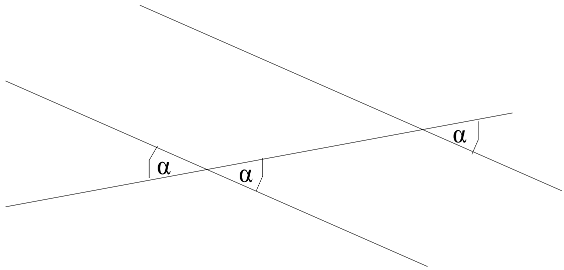


2.6 Eulersche Gerade

In jedem Dreieck liegen Höhenschnittpunkt H, Schwerpunkt S und Umkreismittelpunkt U auf einer Geraden. S liegt dabei zwischen H und U, und es gilt $\overline{HS}:\overline{SU}=2:1$.

2.7 Z-Satz

Seien g und h zwei parallele Geraden und f eine weitere Gerade, die diese beiden schneidet. Dann schließt f mit beiden denselben Winkel ein.

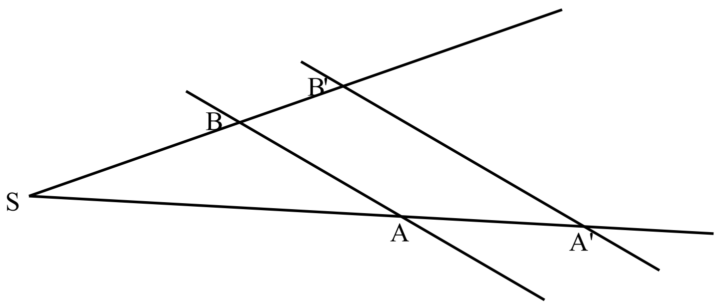


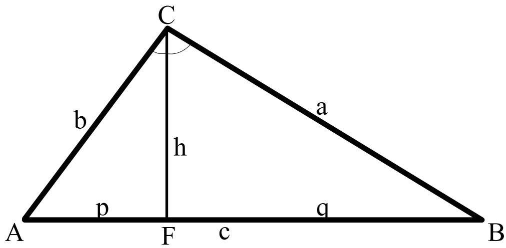
2.8 Strahlensatz

Sei S ein Punkt, von dem zwei Strahlen ausgehen, und seien g und h zwei parallele Geraden, die beide nicht durch S gehen. g schneide die beiden Strahlen in den Punkten A und B, h in den Punkten A' und B'. Dann gilt:

$$\overline{SA}:\overline{SA'} \;=\; \overline{SB}:\overline{SB'} \;=\; \overline{AB}:\overline{A'B'}$$

Umgekehrt gilt: Wenn 5 Punkte die obige Bedinung erfüllen, so sind die Strecken AB und $A'B'$ zueinander parallel.





2.9 Satzgruppe von Pythagoras

Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit rechtem Winkel in C. Sei $c=\overline{AB}$ die Länge der Hypotenuse und seien a und b die Längen der Katheten BC und AC.

2.9.1 Satz von Pythagoras

Es gilt im oben beschriebenen Dreieck: $a^2+b^2=c^2$.

Die Umkehrung gilt ebenso: Wenn in einem Dreieck der Satz des Pythagoras gilt, dann ist das Dreieck rechtwinkelig.

2.9.2 Höhensatz

Sei F der Fußpunkt der Höhe auf AB, h die Länge dieser Höhe, $p=\overline{AF}$ der Hypotenusenabschnitt auf der einen Seite des Fußpunktes und $q=\overline{FB}$ der andere Hypotenusenabschnitt. Dann gilt: $h^2=p\cdot q$

Die Umkehrung gilt ebenso: Gilt in einem Dreieck der Höhensatz, so ist das Dreieck rechtwinkelig.

2.9.3 Kathetensatz

Weiters gilt: $b^2=p\cdot c$ und $a^2=q\cdot c$

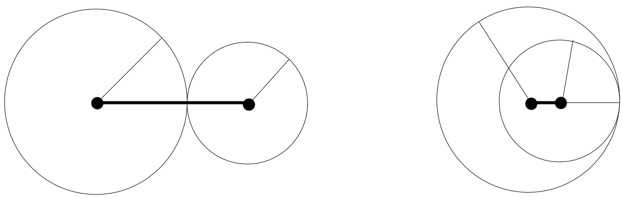
2.10 Heronsche Flächenformel

Sei ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c, und sei s der halbe Umfang, also $s=\dfrac{a+b+c}{2}$. Dann lässt sich die Fläche des Dreiecks berechnen als $A=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$.

3 Kreise

3.1 Berührende Kreise

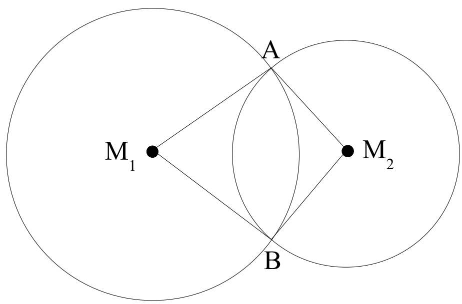
Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich in einem Punkt berühren. Dann ist der Abstand der Mittelpunkte gleich der Summe der Radien, falls die Kreise nicht ineinander liegen, andernfalls die Differenz der Radien.



3.2 Schneidende Kreise

Seien k_1 und k_2 zwei Kreise mit Mittelpunkten in M_1 und M_2, und seien A und B die beiden Schnittpunkte der Kreise. Dann gilt:

- Das Dreieck ABM_1 ist gleichschenkelig.
- Das Dreieck ABM_2 ist gleichschenkelig.
- Die Dreiecke M_1AM_2 und M_1BM_2 sind kongruent.
- Das Viereck AM_1BM_2 ist ein Deltoid.
- AB steht normal auf M_1M_2.

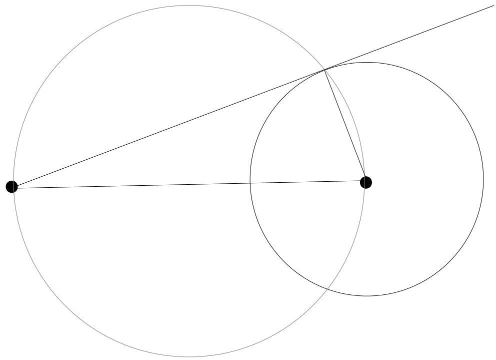


3.3 Tangenten

Die Tangenten von einem Punkt an einen Kreis sind jene zwei Geraden, die durch den Punkt gehen und den Kreis je in genau einem Punkt berühren.

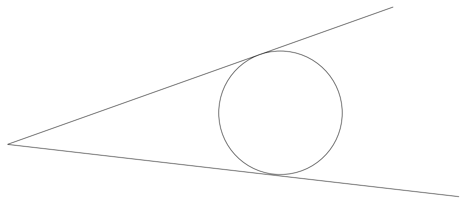
Tangenten stehen immer normal auf den Radius des Kreises durch den Berührpunkt.

Zur Konstruktion: Gegeben seien der Kreis k mit Mittelpunkt M, sowie der Punkt P, von dem die Tangenten an den Kreis gelegt werden sollen. Man konstruiere den Thaleskreis über MP. Die Schnittpunkte mit k sind dann die Berührpunkte der Tangenten.



3.4 Eistütensatz

Die beiden Tangenten von einem Punkt an einen Kreis sind gleich lang.



3.5 Peripheriewinkelsatz

Sei k ein Kreis, AB eine Sehne und seien C und D Punkte auf dem Kreis, die auf der gleichen Seite der Sehne liegen. Dann gilt
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

Sei E ein Punkt auf dem Kreis, der auf der anderen Seite der Sehne liegt. Dann gilt $\sphericalangle AEB = 180° - \sphericalangle ACB$.

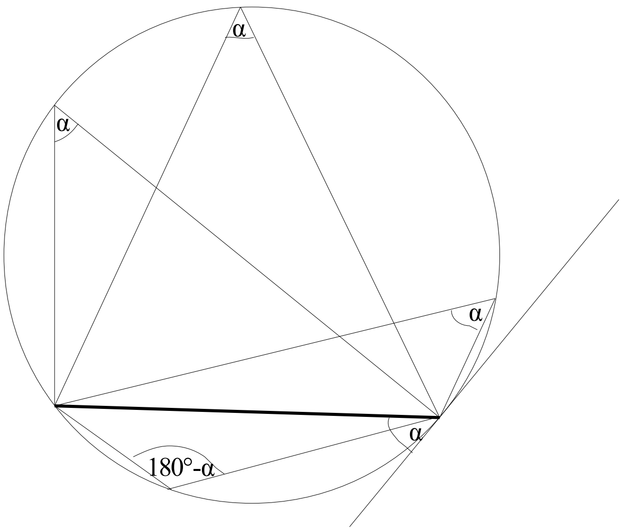
3.6 Zentriwinkelsatz

Sei k ein Kreis, AB eine Sehne, die unter dem Mittelpunkt M verläuft, und C ein Punkt auf dem Kreis über der Sehne. Dann gilt
$\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle ACB$.

Sei E ein Punkt auf dem Kreis, der unter der Sehne liegt. Dann gilt
$\sphericalangle AEB = 180° - \frac{\sphericalangle AMB}{2}$.

3.7 Sehnen-Tangentenwinkel

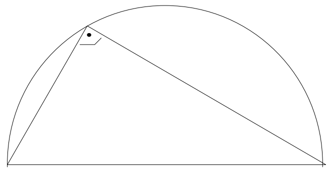
Sei k ein Kreis, AB eine Sehne und t die Tangente in A . Sei weiters C ein Punkt auf dem Kreis. Dann ist der Winkel zwischen t und der Sehne AB gleich groß wie der Peripheriewinkel über dieser Sehne.



3.8 Satz von Thales

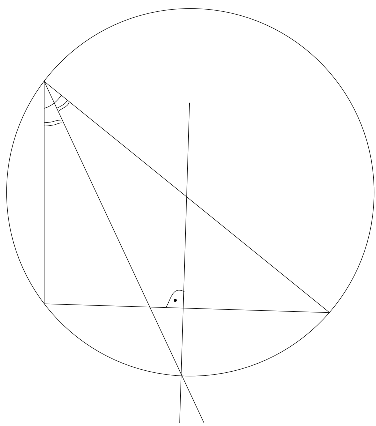
Als Spezialfall des Peripherie- und Zentriwinkelsatzes erhält man den Satz von Thales:

Sei AB ein Durchmesser des Kreises k und C ein Punkt auf dem Kreis. Dann gilt $\sphericalangle ACB = 90°$. („Jedes Dreieck, dessen Grundlinie der Durchmesser eines Kreises ist, und dessen dritter Eckpunkt auf der Kreislinie liegt, ist rechtwinkelig.“)



3.9 Südpolsatz

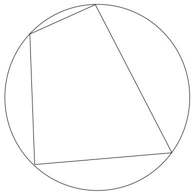
Sei ABC ein Dreieck. Dann schneiden die Streckensymmetrale von AB und die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle ACB$ einander auf dem Umkreis des Dreiecks.



4 Sehnenvierecke und Tangentenvierecke

4.1 Sehnenviereck

Sei $ABCD$ ein Viereck, das einen Umkreis hat. Dann nennt man $ABCD$ ein Sehnenviereck (da es aus vier Kreissehnen besteht).



4.1.1 Gegenüberliegende Winkel

In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel immer auf 180°.

4.1.2 Ähnliche Dreiecke

Sei P der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann sind die Dreiecke ABP und CDP ähnlich. Analog sind natürlich auch die Dreiecke BCP und DAP zueinander ähnlich.

4.1.3 Diagonalenabschnitte

Sei P der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann gilt: $\overline{AP} \cdot \overline{CP} = \overline{BP} \cdot \overline{DP}$.

4.1.4 Satz von Ptolemäus

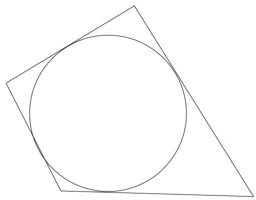
Seien a , b , c und d die Seitenlängen und e und f die Längen der Diagonalen. Dann gilt $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$.

4.1.5 Satz von Brahmagupta

Seien a , b , c und d die Seitenlängen und s der halbe Umfang des Vierecks, also $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. Dann lässt sich die Fläche des Sehnenvierecks berechnen als $A = \sqrt{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot (s-d)}$.

4.2 Tangentenviereck

Sei $ABCD$ ein Viereck, das einen Inkreis hat. Dann nennt man $ABCD$ ein Tangentenviereck, da jede seiner Seiten eine Tangente an denselben Kreis ist.



4.2.1 Summe gegenüberliegender Seiten

In einem Tangentenviereck gilt $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DA}$.

4.3 Sehnentangentenviereck

Ein Viereck, das gleichzeitig Sehnenviereck und Tangentenviereck ist, wird auch Sehnentangentenviereck genannt.

4.3.1 Berührungssehnen

Sei $ABCD$ ein Sehnentangentenviereck und seien $EFGH$ die Berührpunkte des Inkreises. Dann stehen EG und FH normal aufeinander.

Auch die Umkehrung gilt: Wenn diese beiden Strecken normal aufeinander stehen, ist $ABCD$ ein Sehnentangentenviereck.