ÖMO

Österreichische MathematikOlympiade

Grundlagen der Geometrie – Beispiele

Fortgeschrittenenkurs TU Graz 2009/10
Birgit Vera Schmidt

1. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander nicht berühren, und seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte dieser Kreise. Man lege von M_1 die Tangenten an k_2. Diese schneiden k_1 den Punkten A und A'. Analog lege man von M_2 die Tangenten an k_1 und erhalte die Punkte B und B'. Man zeige: $\overline{AA'}=\overline{BB'}$.
2. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks. Man betrachte die Abstände AP, BP und CP und zeige, dass die Summe der beiden kürzeren davon gleich dem längsten ist. (Tipp: Ptolemäus)
3. Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z beliebige Punkte auf AB, BC und CA. Man konstruiere einen Kreis durch A, X und Z, einen Kreis durch B, X und Y und jenen Kreis durch C, Y und Z, und zeige, dass diese einander in einem Punkt schneiden.
4. Sei ABCD ein Sehnenviereck und S der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zeige, dass die Dreiecke ABS und CDS ähnlich sind.
5. Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Er wird an den Dreiecksseiten gespiegelt. Dabei entsteht ein Dreieck PQR. Man zeige: Das Dreieck PQR ist spitzwinkelig. Welcher besondere Punkt des Dreiecks PQR ist der Punkt I? (LWB 1993)
6. Zwei gleich große Kreise k_1 und k_2 schneiden einander in den Punkten P und Q. Für eine (beliebige) Gerade g durch P sei P_1 der zweite Schnittpunkt mit k_1 und P_2 der zweite Schnittpunkt mit k_2. Man zeige, dass unabhängig von der Wahl von g, das Dreieck P_1QP_2 ein gleichschenkeliges Dreieck ist. (LWB 1994)
7. Von einem rechtwinkeligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C sind die Eckpunkte A und B sowie der Punkt P auf der Strecke AB, der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AB, gegeben. Man konstruiere den Eckpunkt C und damit das Dreieck. (LWB 1996)
8. In einem Rechteck ABCD gilt BC = 2AB. Sei S der Halbierungspunkt von AD und P ein beliebiger Punkt auf AB. Der Punkt Q auf BC habe die Eigenschaft, dass SPQ = 45°. Man zeige: SPBQ ist ein Sehnenviereck.
9. Gegeben ist ein spitzwinkeliges Dreieck ABC. Im Mittelpunkt der Seite BC wird die Normale errichtet. Diese schneidet AC im Punkt M. Im Mittelpunkt der Seite AC wird ebenfalls die Normale errichtet. Diese schneidet BC in N. Es sei O der Umkreismittelpunkt von ABC. Zeige: A, B, N, O, M liegen auf einem Kreis.
10. Über dem Durchmesser AB wird der Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Über MB wird auf der selben Seite der Geraden AB der Halbkreis k errichtet. Seien X und Y Punkte auf k, sodaß der Bogen BX eineinhalb mal so groß wie der Bogen BY ist. Die Gerade MY schneidet die Gerade BX in D und den großen Halbkreis h in C. Man zeige, daß Y der Mittelpunkt der Strecke CD ist. (GWB 2005)
11. Im spitzwinkeligen, nicht gleichseitigen Dreieck ABC mit dem Winkel BCA = 60° seien U der Umkreismittelpunkt, H der Höhenschnittpunkt und D der Schnittpunkt der Geraden AH und BC (Höhenfußpunkt der Höhe durch A). Man zeige, dass die eulersche Gerade HU Winkelsymmetrale des Winkels BHD ist. (BWF 2000)
12. In einem Parallelogramm ABCD werden auf den Seiten AB und BC die Punkte E und F so gewählt, dass sie mit keinem Eckpunkt zusammenfallen und die Strecken AE und FC gleich lang sind. Der Schnittpunkt der Strecken AF und CE wird mit G bezeichnet. Beweise, dass DG den Winkel ADC halbiert.
13. Es sei ABC ein beliebiges Dreieck und I sein Inkreismittelpunkt. Man spiegelt I an den Dreiecksseiten und erhält dadurch die drei Punkte D, E und F. Man rekonstruiere das Dreieck ABC, wenn die Punkte D, E und F gegeben sind.
14. Man konstruiere ein rechtwinkeliges Dreieck ABC, von dem die Hypotenuse c gegeben ist und bekannt ist, dass zwei Schwerlinien aufeinander normal stehen.
15. Über der Strecke AB wird der Halbkreis h gezeichnet, auf dem der Punkt C liegt. Von ihm wird die Normale auf AB gezeichnet, deren Fußpunkt F ist. Dem Gebiet, das von h und den Strecken CF und FB begrenzt wird, wird der Inkreis eingeschrieben. Er berührt AB im Punkt D. Man zeige, dass das Dreieck ACD gleichschenkelig ist.
16. Auf dem Halbkreis über einer Strecke AB bewegen sich zwei Punkte C und D, deren Abstand konstant ist. E sei der Schnittpunkt von AC und BD, F sei der Schnittpunkt von AD und BC. Beweise, dass der Flächeninhalt des Vierecks AEBF konstant ist.
17. Zwei Kreise k1 und k2 schneiden einander in den Punkten A und B. Eine der zwei gemeinsamen Tangenten berührt k1 im Punkt C und k2 im Punkt D. (Es sei B der näher zu CD liegende Schnittpunkt.) Ferner schneidet die Gerade durch B und C den Kreis k2 ein weiteres Mal im Punkt E. Man beweise, dass AD den Winkel CAE halbiert