IMO 2016

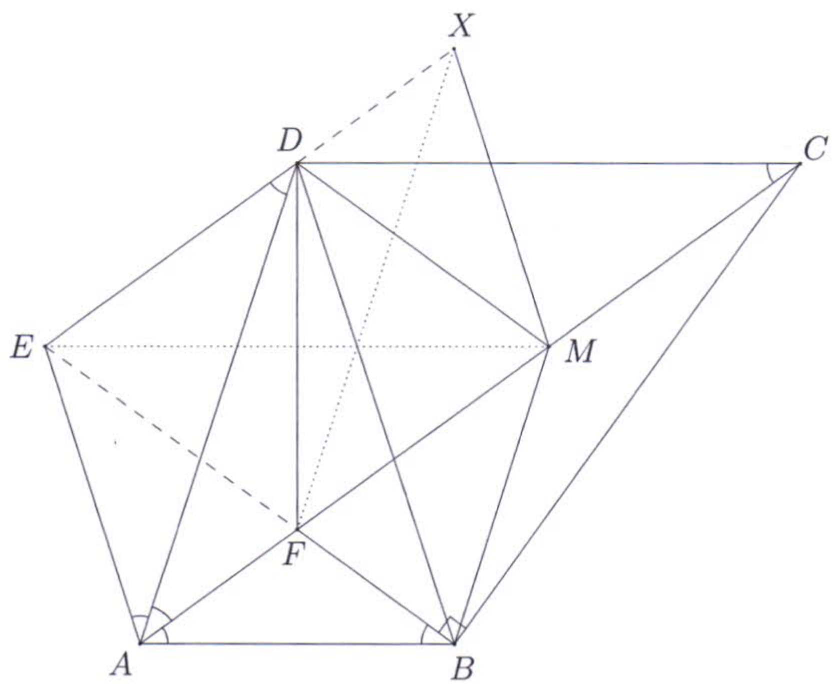
Aufgabe 1: Das Dreieck BCF habe einen rechten Winkel in B. Es sei A der Punkt auf der Geraden CF, für den $FA = FB$ gilt und F zwischen A und C liegt. Der Punkt D sei so gewählt, dass $DA = DC$ gilt und AC den Winkel $\sphericalangle DAB$ halbiert. Der Punkt E sei so gewählt, dass $EA = ED$ gilt und AD den Winkel $\sphericalangle EAC$ halbiert. Es sei M der Mittelpunkt von CF. Ferner sei X derjenige Punkt, für den $AMXE$ ein Parallelogramm (mit $AM \parallel EX$ und $AE \parallel MX$) ist.

Man beweise, dass sich BD, FX und ME in einem Punkt schneiden.

Lösung: Zunächst bemerken wir, dass die Definition zur Folge hat, dass die Dreiecke ABF, ACD und ADE gleichschenkelig sind, mit

$$\sphericalangle FAB = \sphericalangle FBA = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA = \sphericalangle EAD = \sphericalangle EDA.$$

Wir definieren diesen Winkel als θ.



Nun gilt $\triangle ABF \sim \triangle ACD$, und somit $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AD}$. Wegen $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FAB = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DAF$ folgt somit auch $\triangle ABC \sim \triangle AFD$. Außerdem gilt $\sphericalangle AFD = \sphericalangle ABC = 90^\circ + \theta$, und wegen $\theta = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AED$ im gleichschenkeligen Dreieck $\triangle AED$, folgt somit

$$\sphericalangle AFD = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AED.$$

Dies bedeutet aber nach Peripheriewinkelsatz, dass F auf dem Kreis durch A und D mit Mittelpunkt in E liegt, und es gilt somit $EF = EA = ED$. Im gleichschenkeligen Dreieck $\triangle EAF$ gilt also $\sphericalangle EFA = \sphericalangle EAF = 2\theta$. Da $\sphericalangle BFC = \sphericalangle FAB + \sphericalangle FBA = 2\theta$ gilt, liegen E, F und B somit auf einer gemeinsamen Geraden.

Nach der Definition gilt $\sphericalangle EDA = \sphericalangle MAD$, und somit gilt sicher $ED \| AM$, womit E, D und X ebenfalls auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Der Punkt M ist Mittelpunkt von CF, und wegen $\sphericalangle CBF = 90^\circ$ ist M somit der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle CBF$. Es gilt also $MB = MF$, und das Dreieck $\triangle MBF$ ist gleichschenkelig mit Basiswinkel 2θ. Dies gilt auch für $\triangle EAF$, und da diese beiden Dreiecke auch gleich lange Basen besitzen, sind sie kongruent. Wir erhalten also $BM = AE = MX$ (im Parallelogramm $AMXE$). Außerdem gilt auch $BE = BF + FE = AF + FM = AM = EX$, und somit folgt nach dem SSS-Satz $\triangle EMB \cong \triangle EMX$. Da F und D auf EB bzw. EX liegen mit $EF = ED$, liegen die Strecken BD und XF symmetrisch bezüglich EM, womit sicher BD, XF und EM durch einen gemeinsamen Punkt gehen müssen. $\square$

Aufgabe 2: Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die jedes Feld einer $n \times n$ Tabelle so mit einem der Buchstaben I, M und O gefüllt werden kann, dass:

- in jeder Zeile und in jeder Spalte ein Drittel der Einträge I, ein Drittel M und ein Drittel O sind, und
- in jeder Diagonale, in der die Anzahl der Einträge ein Vielfaches von drei ist, ein Drittel der Einträge I, ein Drittel M und ein Drittel O sind.

Bemerkung: Die Zeilen und Spalten der $n \times n$ Tabelle sind in üblicher Reihenfolge von 1 bis n nummeriert. Damit entspricht jedes Feld einem Paar positiver ganzer Zahlen (i, j) mit $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Für $n > 1$ hat die Tabelle $4n - 2$ *Diagonalen*, die sich in zwei Arten aufteilen. Eine Diagonale der ersten Art besteht aus allen Feldern (i, j), für die $i + j$ eine Konstante ist. Eine Diagonale der zweiten Art besteht aus allen Feldern (i, j), für die $i - j$ eine Konstante ist.

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass eine passende Konfiguration immer möglich ist, wenn n ein Vielfaches von 9 ist. Wir betrachten zu diesem Zweck die folgende Tabelle:

$$\begin{pmatrix} I & I & I & M & M & M & O & O & O \\ M & M & M & O & O & O & I & I & I \\ O & O & O & I & I & I & M & M & M \\ I & I & I & M & M & M & O & O & O \\ M & M & M & O & O & O & I & I & I \\ O & O & O & I & I & I & M & M & M \\ I & I & I & M & M & M & O & O & O \\ M & M & M & O & O & O & I & I & I \\ O & O & O & I & I & I & M & M & M \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass diese Tabelle die Bedingungen jedenfalls erfüllt.

Gilt nun $n = 9k$, können wir in der $n \times n$ Tabelle $k \times k$ Kopien dieser Anordnung einsetzen. Dies ergibt sicher eine Konfiguration, in der jede Zeile und jede Spalte gleich viele I, M und O enthält. Für die Diagonalen gilt dies auch, da jede Diagonale jede derartige 9×9 Teiltabelle in einer durch 3 teilbaren Anzahl von Feldern schneidet (möglicherweise gleich 0). Alle Bedingungen sind also erfüllt und wir sehen, dass der Fall $n = 9k$ immer eine Konfiguration der geforderten Art zulässt.

Nun müssen wir noch zeigen, dass ein nicht durch 9 teilbares n keine derartige Konfiguration zulässt. Sei zu diesem Zweck eine ausgefüllte $n \times n$ Tabelle vorgegeben, die alle geforderten Bedingungen erfüllt. Da in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich viele I, M und O enthalten sind, gilt sicher $n = 3k$ mit $k \in \mathbb{Z}^+$.

Nun denken wir uns die ganze Tabelle in $k \times k$ Teile der Größe 3×3 zerteilt. Wir bezeichnen den mittleren Eintrag einer solchen 3×3 Gruppe als *zentral* und jede Zeile, Spalte oder Diagonale, die ein solches zentrales Feld enthält ebenfalls als *zentral*. Nun bestimmen wir die Anzahl der Paare (l, c), für welche l eine zentrale Linie ist und c ein Feld dieser Linie, in der ein M steht.

Diese Anzahl sei N. In jeder zentralen Zeile (und jeder zentralen Spalte) gibt es gleich viele I, M und O, und somit k Mal M.

In den zentralen Diagonalen (in jeder der beiden Richtungen) gibt es offensichtlich insgesamt

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) + k + (k-1) + \ldots + 2 + 1 = k^2$$

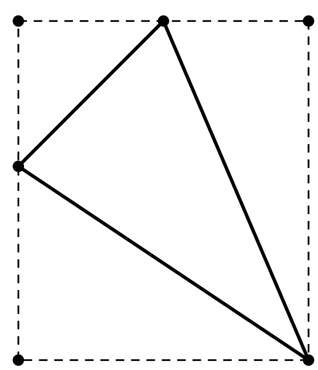
Mal M, und somit gilt insgesamt $N = 4k^2$.

Insgesamt gibt es in der Tabelle sicher $3k^2$ Mal M. Jedes Feld der Tabelle liegt entweder auf 1 oder 4 zentralen Linien. Somit gilt aber sicher $N \equiv 3k^2 \pmod 3$, da jedes M bei der Bestimmung von N entweder 4 Mal gezählt wurde (wenn es auf einem zentralen Feld liegt) oder 1 Mal (in allen anderen Fällen). Es gilt also $4k^2 \equiv 3k^2 \pmod 3$. daraus folgt aber, dass k durch 3 teilbar sein muss, und somit n durch 9, wie behauptet. □

Aufgabe 3: Es sei $P = A_1A_2 \ldots A_k$ ein ebenes konvexes Vieleck. Die Eckpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_k$ haben ganzzahlige Koordinaten und liegen auf einem Kreis. Es sei S der Flächeninhalt von P. Ferner sei eine ungerade positive ganze Zahl n gegeben, sodass die Quadrate der Seitenlängen von P durch n teilbare ganze Zahlen sind.

Man beweise, dass $2S$ eine durch n teilbare ganze Zahl ist.

Lösung: Es sei $P = A_1A_2 \ldots A_k$ und $A_{k+i} = A_i$ für $i \geq 1$. Die Fläche eines Vielecks mit ganzzahligen Eckpunktkoordinaten ist sicher eine halbe ganze Zahl, da man das Vieleck in lauter Dreiecke mit ganzzahligen Eckpunktkoordinaten zerlegen kann. Jedes derartige Dreieck kann durch ein Rechteck umschrieben werden, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen, wie in der Abbildung zu sehen ist.



Der Flächeninhalt des Dreiecks ist gleich dem ganzzahligen Flächeninhalt des Rechtecks, abzüglich der Flächeninhalte der rechtwinkeigen Ergänzungsdreiecke, deren Flächen durch Ausdrücke der Form $\frac{ab}{2}$ berechnet werden, wobei a und b ihre ganzzahligen Kathetenlängen sind. Der Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks ist somit sicher eine halbe ganze Zahl

$2S$ ist also sicher eine ganze Zahl, und wir wollen nun zeigen, dass $2S$ durch n teilbar ist, wenn alle Seitenlängen durch n teilbar sind. Zu diesem Zweck können wir uns auf den Fall beschränken, dass $n = p^t$ gilt, wobei p eine ungerade Primzahl ist und $t \geq 1$ gilt. Wir führen den Beweise mittels vollständiger Induktion nach k durch.

Sei zuerst $k = 3$. In diesem Fall nehmen wir an, die Längen der Seiten seien $\sqrt{na}$, $\sqrt{nb}$ und $\sqrt{nc}$, wobei a, b, c positive ganze Zahlen sind. Nach der Heron'schen Flächenformel gilt

$$16S^2 = n^2(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2).$$

Wir sehen, dass $16S^2$ sicher durch n^2 teilbar ist, und da n ungerade ist, ist $2S$ somit sicher durch n teilbar.

Nun gelte $k \geq 4$. Ist das Quadrat der Länge einer Diagonale von P durch n teilbar, teilt diese Diangonale P in zwei kleinere Vielecke, auf die wir die Induktionsannahme anwenden können, womit wir fertig wären. Wir können also annehmen, dass das Quadrat der Länge keiner Diagonale durch n teilbar ist. Im Weiteren bezeichne $\nu_p(r)$ den Exponenten von p in der Primzerlegung von r. Wir machen nun folgenden Behauptung:

Behauptung: Es gilt $\nu_p(A_1A_m^2) > \nu_p(A_1A_{m+1}^2)$ für $2 \leq m \leq k-1$.

Beweis: Für $m = 2$ ist dies offensichtlichm, da $\nu_p(A_1A_2^2) \geq p^t > \nu_p(A_1A_3^2)$ aufgrund der Angabe und der obigen Annahme gilt.

Nehmen wir nun an, es gelte $\nu_p(A_1A_2^2) > \nu_p(A_1A_3^2) > \ldots > \nu_p(A_1A_m^2)$ mit $3 \leq m \leq k-1$. Für die Induktion wenden wir den Satz von Ptolomäus im Sehnenviereck $A_1A_{m-1}A_mA_{m+1}$ an, und erhalten

$$A_1A_{m+1} \cdot A_{m-1}A_m + A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} = A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1}$$

und somit

$$\begin{aligned} A_1A_{m+1}^2 \cdot A_{m-1}A_m^2 = {} & A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2 + A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2 - \\ & -2A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} \cdot A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir sehen, dass $2A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} \cdot A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1}$ jedenfalls eine ganze Zahl ist. Nun betrachten wir den Exponenten von p in jedem Summanden von (1). Nach der Induktionsannahme gilt $\nu_p(A_1A_{m-1}^2) > \nu_p(A_1A_m^2)$. Außerdem gilt $\nu_p(A_mA_{m+1}^2) \geq p^t > \nu_p(A_{m-1}A_{m+1}^2)$. Dies ergibt zusammen

$$\nu_p(A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2) > \nu_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2). \tag{2}$$

Nun erhalten wir aus (2) die Beziehung

$$\begin{aligned} & \nu_p(4A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2 \cdot A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2) \\ = {} & \nu_p(A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2) + \nu_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2) \\ > {} & 2\nu_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2), \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\nu_p(2A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} \cdot A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1}) > \nu_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2). \tag{3}$$

Kombinieren wir nun die Aussagen (1), (2) und (3), erhalten wir

$$\nu_p(A_1A_{m+1}^2 \cdot A_{m-1}A_m^2) = \nu_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2).$$

Wegen $\nu_p(A_{m-1}A_m^2) \geq p^t > \nu_p(A_{m-1}A_{m+1}^2)$ erhalten wir somit $\nu_p(A_1A_{m+1}^2) < \nu_p(A_1A_m^2)$. Die Behauptung folgt also durch Induktion. □

Aufgabe 4: Eine Menge von positiven ganzen Zahlen heiße *duftend*, wenn sie mindestens zwei Elemente enthält und jedes ihrer Elemente mit wenigstens einem anderen ihrer Elemente mindestens einen Primfaktor gemeinsam hat. Es sei $P(n) = n^2 + n + 1$. Man bestimme die kleinstmögliche positive ganze Zahl b, für die eine nicht-negative ganze Zahl a existiert, sodass die Menge

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

duftend ist.

Lösung: Die kleinste Anzahl von Elementen einer solchen Menge ist 6. Um dies einzusehen, machen wie zunächst einige vorbereitende Beobachtungen.

(1) $(P(n), P(n+1)) = 1$ gilt für alle n.
Da n^2+n+1 für alle Werte von n ungerade ist, folgt aus dem Euklidischen Algorithmus

$$\begin{aligned}(P(n), P(n+1)) =&(n^2+n+1, n^2+3n+3)\\ =&(n^2+n+1, 2n+2)\\ =&(n^2+n+1, n+1)\\ =&(1, n+1)\\ =&1.\end{aligned}$$

(2) $(P(n), P(n+2)) = 1$ gilt für $n \not\equiv 2 \pmod 7$ und $(P(n), P(n+2)) = 7$ für $n \equiv 2 \pmod 7$.
Wegen $P(n) = n^2+n+1$ und $P(n+2) = n^2+5n+7$, gilt

$$\begin{aligned}(2n+7)P(n) - (2n-1)P(n+2) =&(2n+7)(n^2+n+1) - (2n-1)(n^2+5n+7)\\ =&14.\end{aligned}$$

$P(n) = n^2+n+1$ ist sicher ungerade, und der ggT von $P(n)$ und $P(n+2)$ ist somit 7. Betrachten wir nun die Ausdrücke modulo 7, erhalten wir

n	$P(n)$	$P(n+2)$
0	1	0
1	3	-1
2	0	0
3	-1	3
$4=-3$	0	1
$5=-2$	3	1
$6=-1$	1	3

(3) $(P(n), P(n+3)) = 1$ gilt für $n \not\equiv 1 \pmod 3$ und $3|(P(n), P(n+3))$ für $n \equiv 1 \pmod 3$.
Wegen

$$\begin{aligned}(n+5)P(n) - (n-1)P(n+3) =&(n+5)(n^2+n+1) - (n-1)(n^2+7n+13)\\ =&18,\end{aligned}$$

und aufgrund der Tatsache, dass $P(n)$ ungerade ist, gilt somit $(P(n), P(n+3))|9$. Modulo 3 erhalten wir

n	$P(n)$	$P(n+3)$
0	1	1
1	0	0
-1	1	1

Nehmen wir nun an, es gäbe eine duftende Menge mit höchstens 5 Elementen. Wir nehmen an, die Menge enthielte genau 5 Elemente, da der gleiche Widerspruch analog auch für weniger Elemente folgt. Seiene also die Elemente der Menge $P(n), P(n+1), \ldots, P(n+4)$. Wir betrachten das Element $P(n+2)$. Wegen (1) gilt jedenfalls $(P(n+1), P(n+2)) = (P(n+2, n+3)) = 1$. Sei oBdA $(P(n), P(n+2) > 1$. Dann gilt nach (2) sicher $n \equiv 2 \pmod 7$. Somit gilt aber $n+1 \equiv 3 \pmod 7$, und daher $(P(n+1), P(n+3)) = 1$. Soll die Menge duftend sein, müssen also sowohl $(P(n), P(n+3))$ als auch $(P(n+1), P(n+4))$ größer als 1 sein, was aber bedeuten würde, dass sowohl n als auch $n+1$ kongruent 1 (mod 3) wären, was nicht sein kann. Wir sehen also, dass eine duftende Menge mindestens 6 Elemente enthalten muss.

Ein Beispiel für eine durftende Menge können wir nun mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes bestimmen.

Wählen wir $a+1 \equiv 2 \pmod 7$, sind nach (2) $P(a+1)$ und $P(a+3)$ beide durch 7 teilbar. Wählen wir $a+2 \equiv 1 \pmod 3$, sind nach (3) $P(a+2)$ und $P(a+5)$ beide durch 3 teilbar. Nun beobachten wir, dass $P(7) = 57$ und $P(11) = 133$ gilt, und somit $19|P(7)$ und $19|P(11)$. Wählen wir also $a \equiv 7 \pmod{19}$, sind sicher $P(a)$ und $P(a+4)$ beide durch 19 teilbar. Lösen wir die Simultankongruenz $a \equiv 7 \pmod{19}$, $a+1 \equiv 2 \pmod 7$, $a+2 \equiv 1 \pmod 3$, erhalten wir z.B. den Wert $a = 197$, und für diesen Wert ist die Menge $\{P(a), P(a+1), \ldots, P(a+5)\}$ duftend.

Der gesuchte Wert ist also, wie behauptet, 6. $\square$

Aufgabe 5: Die Gleichung

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

mit 2016 Linearfaktoren auf jeder Seite, steht auf einer Tafel. Man bestimme das kleinstmögliche k, für das genau k dieser 4032 Linearfaktoren gelöscht werden können, sodass auf jeder Seite mindestens ein Linearfaktor verbleibt und die entstehende Gleichung keine reelle Lösung besitzt.

Lösung: Die Antwort ist 2016.

Wir erkennen sofort, dass ein Löschen von weniger als 2016 Faktoren einen gemeinsamen Faktor $(x-i)$ auf beiden Seiten der Gleichung zurücklässt, womit i eine Lösung der Gleichung ist. Es müssen also mindestens 2016 Faktoren gelöscht werden.

Nun können wir eine Konstruktion angeben, in der genau 2016 Faktoren gelöscht werden, und für die keine reelle Lösung existiert.

Zu diesem Zweck löschen wir auf der linken Seite der Gleichung alle Faktoren $(x-k)$ mit $k \equiv 2, 3 \pmod 4$ und auf der rechten Seite alle mit $k \equiv 0, 1 \pmod 4$. Die verbleibende Gleichung können wir dann in der Form

$$\prod_{j=0}^{503}(x-4j-1)(x-4j-4) = \prod_{j=0}^{503}(x-4j-2)(x-4j-3)$$

schreiben

Um zu erkennen, dass diese Gleichung keine reelle Lösung besitzt, betrachten wir die möglichen Fälle für eine derartige Lösung x.

Fall 1): $x \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$.

Für alle derartigen Werte von x nimmt eine Seite der Gleichung den Wert 0 an und die andere nicht. Derartige Zahlen sind also sicher keine Lösungen.

Fall 2): $4k+1 < x < 4k+2$ oder $4k+3 < x < 4k+4$ für ein $k \in \{0, 1, \ldots, 503\}$.

In diesem Fall ist das Produkt $(x-4j-1)(x-4j-4)$ negativ für $j = k$, andernfalls immer positiv. Andererseits sind alle Produkte der Form $(x-4j-2)(x-4j-3)$ positiv. Wir sehen, dass die linke Seite der Gleichung einen negativen Wert annimmt und die rechte Seite einen positiven, womit x keine Lösung sein kann.

Fall 3): $x < 1$ oder $x > 2016$ oder $4k < x < 4k+1$ für ein $k \in \{1, 2, \ldots, 503\}$.

Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$1 = \prod_{j=0}^{503} \frac{(x-4j-1)(x-4j-4)}{(x-4j-2)(x-4j-3)} = \prod_{j=0}^{503} \left(1 - \frac{2}{(x-4j-2)(x-4j-3)}\right).$$

Nun bemerken wir, dass $(x-4j-2)(x-4j-3) > 2$ für $0 \leq j \leq 503$ in diesem Fall gilt. Somit ist jeder Faktor des rechts stehenden Produkts kleiner als 1, was einen Widerspruch ergibt.

Fall 4): $4k+2 < x < 4k+3$ für ein $k \in \{0, 1, \ldots, 503\}$.

In diesem Fall schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} 1 =& \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2016}{x-2015} \cdot \prod_{j=1}^{503} \frac{(x-4j-1)(x-4j-4)}{(x-4j-2)(x-4j-3)} \\ =& \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2016}{x-2015} \cdot \prod_{j=1}^{503} \left(1 - \frac{2}{(x-4j-2)(x-4j-3)}\right). \end{aligned}$$

Die ersten beiden Faktoren dieses Ausdrucks sind sicher größer als 1.

Da auch $(x-4j+1)(x-4j-2)$ in diesem Fall für alle j positiv ist, ist auch jeder Faktor des Produkts größer als 1, und wir erhalten auch in diesem letzten Fall einen Widersruch.

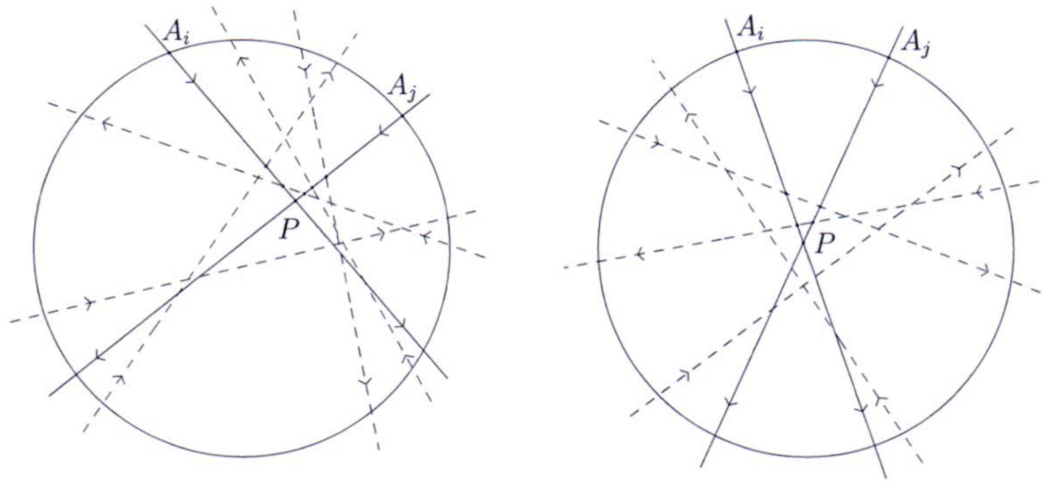
Alle möglichen Fälle ergeben also einen Widerspruch, und wir sehen, dass die Gleichung tatsächlich keine reelle Lösung besitzt. Es gibt also ein Beispiel, in dem das Löschen von genau 2016 Faktoren zu einer Gleichung ohne reelle Lösung führt, und die Antwort ist somit tatsächlich, wie behauptet, 2016. □

Aufgabe 6: In der Ebene seien $n \geqslant 2$ Strecken so gegeben, dass sich je zwei Strecken kreuzen und keine drei durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen. Lisa soll von jeder Strecke einen ihrer Endpunkte auswählen und dort einen Frosch so hinsetzen, dass er zum anderen Endpunkt blickt. Dann wird sie $n-1$ mal in die Hände klatschen. Jedes Mal, wenn sie klatscht, springt jeder Frosch sofort vorwärts auf den nächsten Schnittpunkt auf seiner Strecke. Die Frösche wechseln nie die Sprungrichtung. Lisa möchte die Frösche so hinsetzen, dass sich niemals zwei Frösche gleichzeitig auf dem gleichen Schnittpunkt befinden.

a) Man beweise, dass Lisa dies immer erreichen kann, wenn n ungerade ist.

b) Man beweise, dass Lisa dies niemals erreichen kann, wenn n gerade ist.

Lösung: Wir betrachten einen Kreis, der alle Strecken im Inneren enthält, und verlängern die Strecken bis zu ihren Schnittpunkten mit diesem Kreis. Ersetzen wir die ursprünglichen Streckenendpunkte durch diese, ändert sich an der Angabe offensichtlich nichts.



a) Zunächst sei n ungerade.

Wir bezeichnen die Streckenendpunkte auf dem Kreis (z.B.) im positiven Umlaufsinn) der Reihe nach abwechselnd mit A (für "Anfang") und E (für "Ende"). Außerdem versehen wir jede Strecke mit einem Index. Liegt ein Punkt "A" auf der Strecke i, bezeichnen wir den Punkt also als "A_i". Da jede Strecke von jeder anderen geschnitten wird, gibt es zwischen den beiden Schnittpunkten von i mit dem Kreis für jedes i genau $n-1$ Punkte auf dem Kreis. Da $n-1$ gerade ist, gibt es also zu jeder Strecke i Endpunkte A_i und E_i.

Nun nehmen wir an, zwei Frösche starten in A_i und A_j. Zwischen diesen beiden Punkten geibt es auf beiden Bögen je eine ungerade Anzahl von Streckenendpunkten. Betrachten wir den Bogenauf den die Anzahl kleiner oder gleich der Anzahl des anderen Bogens ist. Sei P der Schnittpunkt der beiden Strecken i und j. Von den Strecken mit einem Endpunkt auf dem benachbarten Bogenschneidet jeder entweder i zwischen A_i und P oder j zwischen A_j und P, die andere Strecke aber sicher jenseits dieser Abschnitte. Von etwaigen Strecken mit beiden Endpunkten auf dem anderen Bogen, liegen entweder die Schnittpunkte mit i und j beide auf A_iP bzw. A_jP oder beide jenseits davon. In Summe ist jedenfalls die Gesamtzahl der Schnittpunkte von i und j auf den Strecken A_iP und A_jP sicher ungerade. Die Frösche auf diesn beiden Strecken treffen also in P sicher nicht zusammen. Da i und j beliebig gewählt wurden, treffen somit in diesem Fall keine zwei Frösche zusammen.

b) Nun sei n gerade.

Egal wie man in diesem Fall die Endpunkte der Strecken i mit A_i und E_i beschriftet, sind sicher zwei Punkte A_j und A_k am Kreis benachbart. (Wäre dies nicht der Fall, hätten wir gleich viele Endpunkte auf beiden Bögen, die von A_1 und E_1 begrenzt werden, da jede Strecke von der Strecke 1 geschnitten wird. Es lägen also $n-1$ Punkte auf jedem Bogen, und dies ist eine ungerade Zahl. Auf einem der beiden Bögen wären also mehr A_i als B_i, und auf dieser Seite wäre eine Abfolge $(A_1)EA\ldots EA(E_1)$ nicht möglich.)

Ist nun P der Schnittpunkt von j und k, schneidet jede andere Strecke j und k entweder sowohl auf A_jP und A_kP oder in beiden Fällen jenseits dieser Abschnitte. Jedenfalls gibt es gleich viele Schnittpunkte auf A_jP und A_kP, und die Frösche auf j und k treffen sich sicher in P. $\square$