Pauli-Wettbewerb

Lösungsskizzen

1. (4 Punkte) Man zeige für $x, y \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{(x+y)^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}$$

Wir verschärfen die Ungleichung mit Hilfe der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$:

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)^2}{16} + 1 &\overset{!}{\geq} \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \\ \iff \quad \frac{(x+y)^2}{16} - \frac{x+y}{2} + 1 &\overset{!}{\geq} 0 \\ \iff \quad \left(\frac{x+y}{4} - 1\right)^2 &\overset{!}{\geq} 0 \end{aligned}$$

2. (8 Punkte) Man zeige für $a, b, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$:

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2$$

Linke Seite:
Wegen $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ können a, b und c nicht alle drei größer als 1 sein. Sei oBdA $c \leq 1$, dann gilt $ab + bc + ca - abc \geq ab + bc + ca - ab = c(a+b) \geq 0$.

Rechte Seite:
Wegen arithmetisch-geometrischer Mittelungleichung gilt:

$$\begin{aligned} 4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3} = 4 \cdot (abc)^{\frac{4}{3}} \quad &\iff \\ 1 \geq (abc)^{\frac{4}{3}} \quad &\iff \\ 1 \geq abc \end{aligned}$$

Daher können a, b und c nicht alle drei größer als 1 sein. Dies bedeutet, dass entweder zwei der drei Zahlen beide größer als 1 sein müssen, oder zwei der Zahlen höchstens 1 betragen. Seien oBdA a und b diese beiden Zahlen, dann muss in beiden Fällen $(a-1)(b-1) \geq 0$ gelten, und somit weiters

$$ab + 1 \geq a + b \quad \iff \quad abc + c \geq ac + bc \quad \iff \quad c \geq ac + bc - abc\ .$$

Daraus folgt nun $ab + bc + ca - abc \leq ab + c$. Es genügt also zu zeigen, dass $ab + c \leq 2$. Nehmen wir an, es würde $ab + c > 2$ gelten. Dann würde folgen

$$\begin{aligned} 4 &= a^2 + b^2 + c^2 + abc \\ &= (a^2 + b^2) + c(c + ab) \\ &> 2ab + 2c \\ &> 4\ , \end{aligned}$$

ein Widerspruch.