47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfänger/innen – Lösungen

16. Juni 2016

Aufgabe 1. *Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit zwei verschiedenen positiven Teilern, die von $\frac{n}{3}$ gleich weit entfernt sind.*

(Richard Henner)

Lösung 1. 0 ist natürlich keine Lösung, weil alle verschiedenen natürlichen Zahlen verschiedene Abstände von 0 haben.
Seien s und t die beiden Teiler, die gleichen Abstand von $\frac{n}{3}$ haben, und sei oBdA $s < \frac{n}{3} < t$. Wenn s und t gleichen Abstand von $\frac{n}{3}$ haben, dann gilt $\frac{s+t}{2} = \frac{n}{3}$, also $3(s+t) = 2n$. Daraus folgt, dass n durch 3 teilbar sein muss.
Sei nun $n = 3k$ und k eine ungerade Zahl. Dann ist 3 der kleinste Teiler von n, der größer als 1 ist und daher $\frac{n}{3}$ der größte Teiler, der kleiner als n ist. Dann muss $t = n$ und $s = -\frac{n}{3}$ sein, s ist also nicht positiv. Daher kann eine ungerade Zahl keine Lösung sein.
Sei $n = 6k$. Dann ist $\frac{n}{3} = 2k$ und $s = k$ und $t = 3k$ sind Teiler von $6k$ und haben von $2k$ den gleichen Abstand.
Daher sind die positiven Vielfachen von 6 alle Lösungen.

(Richard Henner) □

Lösung 2. Weil die kleinstmöglichen Teiler einer natürlichen Zahl 1, 2 oder 3 sind, sind die größtmöglichen Teiler n, $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{3}$. Ein Teiler, der größer als $\frac{n}{3}$ ist, kann daher nur n oder $\frac{n}{2}$ sein. Da es keinen nicht-negativen Teiler von n gibt, der von $\frac{n}{3}$ den gleichen Abstand wie n hat, kommt für den größeren der beiden Teiler nur $\frac{n}{2}$ infrage. Der Abstand von $\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{3}$ beträgt $\frac{n}{6}$, und wegen $\frac{n}{3} - \frac{n}{6} = \frac{n}{6}$ ist der kleinere der beiden Teiler gleich $\frac{n}{6}$ und n daher ein Vielfaches von 6.

(Gerhard Kirchner) □

Aufgabe 2. *Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $x \neq -1$, $y \neq -1$ und mit $xy = 1$ die folgende Ungleichung gilt:*

$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$$

(Karl Czakler)

Lösung 1. Die QM - AM Ungleichung $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ gilt auch für $a, b \in \mathbb{R}$. Damit und unter Verwendung der Beziehung $y = \frac{1}{x}$ (wegen $xy = 1$, darf $x \neq 0$ vorausgesetzt werden) gilt daher

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2}{2}} \geq \frac{\frac{2+x}{1+x} + \frac{2+y}{1+y}}{2} = \frac{\frac{2+x}{1+x} + \frac{2x+1}{x+1}}{2} = \frac{3}{2},$$

und daraus folgt die Behauptung.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wegen $xy = 1$, darf wieder $x \neq 0$ und $y \neq 0$ vorausgesetzt werden. Man setzt $y = \frac{1}{x}$. Es git dann

$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 = \left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2 = \frac{5x^2+8x+5}{x^2+2x+1},$$

und es ist zu zeigen, dass

$$\frac{5x^2+8x+5}{x^2+2x+1} \geq \frac{9}{2}.$$

Diese Ungleichung ist aber äquivalent zur Ungleichung

$$(x-1)^2 \geq 0$$

und damit ist alles gezeigt.

(Karl Czakler) □

Lösung 3. Die gegebene Ungleichung ist äquivalent zur Ungleichung

$$2(2+x)^2(1+y)^2 + 2(2+y)^2(1+x)^2 \geq 9(1+x)^2(1+y)^2.$$

Ausmultiplizieren führt auf die Ungleichung

$$4x^2y^2 + 12x^2y + 12xy^2 + 10x^2 + 10y^2 + 32xy + 24x + 24y + 16 \geq \\ 9x^2y^2 + 18x^2y + 18xy^2 + 9x^2 + 9y^2 + 36xy + 18x + 18y + 9.$$

Verwendet man nun die Beziehung $xy = 1$, so erhält man die äquivalente Ungleichung

$$x^2 + y^2 \geq 2 = 2xy,$$

und alles ist gezeigt.

(Karl Czakler) □

Lösung 4. Es gilt

$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{1+x}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{1+y}\right)^2$$

Man substituiert $u = \frac{1}{x+1}$ und $v = \frac{1}{y+1}$. Dann gilt

$$u + v = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 1$$

Die gegebene Ungleichung kann man dann folgendermaßen anschreiben:

$$(1+u)^2 + (1+v)^2 \geq \frac{9}{2}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung $u + v = 1$, ist diese Ungleichung äquivalent zur Ungleichung

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

und alles ist gezeigt.

(Karl Czakler) □

Lösung 5. Wegen $xy = 1$ gilt

$$\frac{2+y}{1+y} = 1 + \frac{1}{1+y} = 1 + \frac{xy}{xy+y} = 1 + \frac{x}{x+1}.$$

Aus $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ folgt $a^2 + b^2 \geq 2ab$ und $2(a^2+b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2$, also

$$a^2 + b^2 \geq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (a+b)^2$$

mit Gleichheit genau für $a = b$. Mit $a = \frac{2+x}{1+x} = 1 + \frac{1}{1+x}, b = \frac{2+y}{1+y} = 1 + \frac{x}{x+1}$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 &= \left(1 + \frac{1}{1+x}\right)^2 + \left(1 + \frac{x}{1+x}\right)^2 \\
&\geq \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+x} + 1 + \frac{x}{x+1}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1+x}{1+x}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = 1 + \frac{1}{1+x} = b = 1 + \frac{x}{x+1}$, also wenn $x = 1 = y$.

(Gottfried Perz) □

Lösung 6. Aus der Bedingung $xy = 1$ folgt $x, y \neq 0$. Durch Einsetzen von $xy = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 &= \frac{4+4x+x^2}{1+2x+x^2} + \frac{4+4y+y^2}{1+2y+y^2} = \frac{4xy+4x+x^2}{xy+2x+x^2} + \frac{4xy+4y+y^2}{xy+2y+y^2} = \\
&= \frac{x(4y+4+x)}{x(y+2+x)} + \frac{y(4x+4+y)}{y(x+2+y)} = \frac{4y+4+x}{y+2+x} + \frac{4x+4+y}{x+2+y} = \frac{5x+5y+8}{y+2+x}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Bedingung $xy = 1$ haben x und y gleiches Vorzeichen. Wir unterscheiden daher zwei Fälle.
1. Fall $x, y > 0$: Dann ist die Behauptung äquivalent zu

$$\frac{5x+5y+8}{y+2+x} \geq \frac{9}{2} \iff 10x + 10y + 16 \geq 9x + 9y + 18 \iff x + y \geq 2.$$

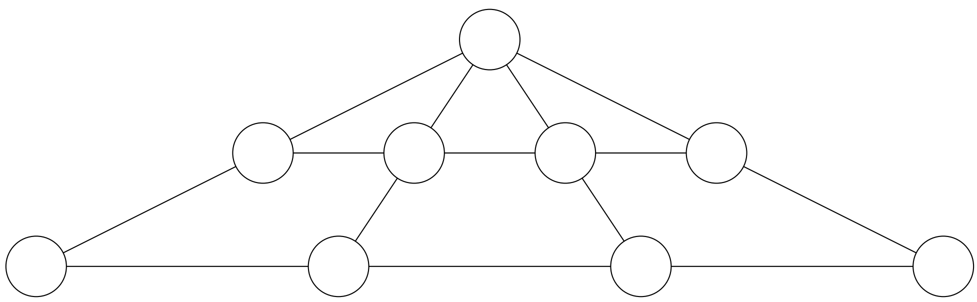
Die letzte Ungleichung folgt aber aus der AGMU $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = 1$.
2. Fall $x, y < 0$: Dann ist die Behauptung äquivalent zu $x + y \leq 2$. In diesem Fall folgt aus der AGMU

$$-\frac{x+y}{2} = \frac{|x|+|y|}{2} \geq \sqrt{|xy|} = 1$$

aber sogar $x + y \leq -2$.

(Jonas Fend, Walther Janous) □

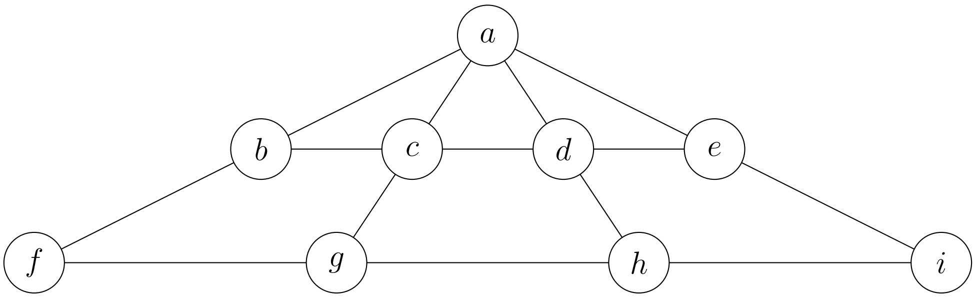
Aufgabe 3. *Wir betrachten die folgende Figur:*



Wir suchen Beschriftungen der neun Felder in der Figur mit den Zahlen 1, 2, ..., 9. Dabei soll jede dieser Zahlen genau einmal verwendet werden. Weiters sollen die sechs Summen von jeweils drei bzw. vier Zahlen längs der eingezeichneten geraden Verbindungen gleich sein.
Man gebe eine solche Beschriftung an.
Man zeige, dass bei allen solchen Beschriftungen im obersten Feld die selbe Zahl steht.
Wie viele solche Beschriftungen gibt es insgesamt? (Zwei Beschriftungen sind verschieden, wenn sie sich in mindestens einem Feld unterscheiden.)

(Walther Janous)

Lösung 1. Wir bezeichnen die Zahlen in den Feldern der Figur folgendermaßen:



Wenn wir den gemeinsamen Wert der sechs Summen mit s bezeichnen, so erhalten wir aus der Angabe die Gleichungen

$$a+b+f=s, \tag{1}$$
$$a+c+g=s, \tag{2}$$
$$a+d+h=s, \tag{3}$$
$$a+e+i=s, \tag{4}$$
$$b+c+d+e=s, \tag{5}$$
$$f+g+h+i=s, \tag{6}$$
$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=1+2+\ldots+9=45. \tag{7}$$

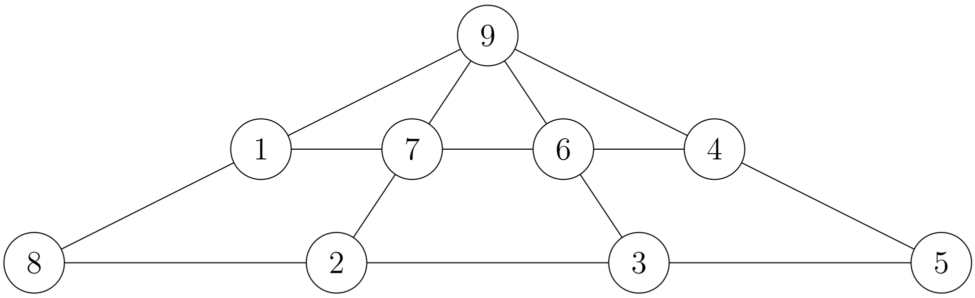
Wenn wir die Gleichungen (1)–(4) addieren und davon (5) und (6) subtrahieren, so erhalten wir $4a=2s$, also $a=\frac{s}{2}$. Addieren wir dazu die Gleichungen (5) und (6), so folgt wegen (7)

$$\frac{s}{2}+s+s=a+b+c+d+e+f+g+h+i=45,$$

das heißt $s=18$ und $a=9$. Die Gleichungen (1)–(6) lauten dann

$$b+f=c+g=d+h=e+i=9, \tag{8}$$
$$b+c+d+e=f+g+h+i=18. \tag{9}$$

Aus (8) folgt $\{\{b,f\},\{c,g\},\{d,h\},\{e,i\}\}=\{\{1,8\},\{2,7\},\{3,6\},\{4,5\}\}$.
Suchen wir zunächst Lösungen mit $\{b,f\}=\{1,8\}$, $\{c,g\}=\{2,7\}$, $\{d,h\}=\{3,6\}$, $\{e,i\}=\{4,5\}$, so sehen wir, dass mit $b=1$, $c=2$ die Gleichung (9) nicht erfüllbar ist, ebenso für $b=8$, $c=7$. Also muss entweder $b=1$, $c=7$, $f=8$, $g=2$ oder $b=8$, $c=2$, $f=1$, $g=7$ gelten. In beiden Fällen sehen wir, dass es aufgrund von Gleichung (9) nur eine Möglichkeit für (d,e,h,i) gibt. Aus diesen Überlegungen erhalten wir die Lösungen $(a,b,c,d,e,f,g,h,i)=(9,1,7,6,4,8,2,3,5)$ und $(9,8,2,3,5,1,7,6,4)$. Das ergibt zum Beispiel die folgende Beschriftung.



Es wurde schon gezeigt, dass $a = 9$ sein muss. Alle weiteren Beschriftungen erhält man daraus durch Vertauschung von (b, c, d, e) mit (f, g, h, i) (2 Möglichkeiten) bzw. unabhängig davon durch Vertauschung von (b, f), (c, g), (d, h), (e, i) untereinander (24 Möglichkeiten). Also gibt es insgesamt 48 mögliche Beschriftungen.

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 2. Wir nennen eine Linie, die vier Zahlen verbindet „waagrecht“ und eine Linie, die drei Zahlen verbindet, „senkrecht“. Da diese waagrechten und senkrechten Linien jeweils gleiche Summe haben, bezeichnen wir die Summe mit x. Die Zahl an der Spitze bezeichnen wir mit y. Die Summe der Zahlen von 1 bis 9 beträgt 45. Daher gilt für die Summe aller waagrechten Summen und der Spitze die Gleichung

$$2x + y = 45. \tag{10}$$

In den Summen der senkrechten Linien kommt jeweils y vor, daher gilt für die Summen aller senkrechten Linien die Gleichung

$$4x = 45 + 3y. \tag{11}$$

Das System und hat die Lösung $x = 18$ und $y = 9$. Die Zahl an der Spitze ist also 9. Die beiden unteren Zahlen in jeder senkrechten Linie müssen daher die Summe 9 haben. Dafür gibt es vier Möglichkeiten: $1 + 8$, $2 + 7$, $3 + 6$, $4 + 5$. Wenn man jetzt darauf achtet, dass die waagrechten Summen jeweils 18 sein müssen, erhält man eine Beschriftung der neun Zahlen, z. B. wie in der 1. Lösung. Die Anzahl der Beschriftungsmöglichkeiten beträgt 48. Die Begründung dafür steht in der 1. Lösung.

(Richard Henner) □

Lösung 3. Wir bezeichnen die Summe der drei oder vier Zahlen, die durch eine gerade Linie verbunden sind, mit s, und die Zahl an der Spitze mit a. Die Summe aller neun natürlichen Zahlen von 1 bis 9 ist 45. Die Summe aller zweimal vier Zahlen entlang der beiden waagrechten Linien ist einerseits gleich $2s$, andrerseits gleich $45 - a$. Daher ist $45 - a = 2s$ gerade und a ungerade. Betrachten wir die Summe alle sechs Summen entlang gerader Linien, so erhalten wir einerseits $6s$; andererseits kommt die Zahl a an der Spitze genau in den vier Summen von drei Zahlen entlang senkrechter gerader Linien vor, jede andere der acht Zahlen kommt genau zweimal (einmal entlang einer waagrechten Linie, ein zweites Mal entlang einer senkrechten Linie) vor. Daraus folgt $6s = 2 \cdot 45 + 2a$, also $a = 3(s - 15)$. Daher ist a ein (ungerades) Vielfaches von 3, also entweder gleich 3 oder gleich 9. Aus $a = 3$ folgt $s = 16$ im Widerspruch zu $45 - a = 2s$. Für $a = 9$ ergibt sich $s = 18$; ein Beispiel für diesen Fall ist in Lösung 1 angegeben; in jeder Lösung steht an der Spitze die Zahl 9. Der Rest kann wie in Lösung 1 erledigt werden.

(Gottfried Perz) □

Aufgabe 4. *Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten C und D. Weiters sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Man beweise, dass die Strecken PA und PD gleich lang sind.*

(Gottfried Perz)

Lösung 1. Wegen $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ und $BC \perp CD$, $CD \perp DE$ ist $BCDE$ ein Quadrat, also stimmt auch die Länge der Strecke $\overline{BE}$ mit der Seitenlänge des Fünfecks $ABCDE$ überein, und es gilt $BC \perp BE$, $BE \perp DE$. Weiters ist das Dreieck ABE wegen $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{BE}$ ein gleichseitiges Dreieck. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sphericalangle CBA &= \sphericalangle CBE + \sphericalangle EBA = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ,\\ \sphericalangle AED &= \sphericalangle AEB + \sphericalangle BED = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.\end{aligned}$$

Wegen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EA}$ sind ABC und AED somit kongruente gleichschenklige Dreiecke, und wir erhalten

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EDA = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Weil jede Quadratdiagonale die rechten Winkel in ihren Endpunkten halbiert, ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\sphericalangle ADP &= \sphericalangle EDB - \sphericalangle EDA = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ,\\ \sphericalangle PAD &= \sphericalangle BAE - \sphericalangle BAC - \sphericalangle DAE = 60^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ.\end{aligned}$$

Daher ist ADP ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis AD, und es folgt $\overline{PA} = \overline{PD}$.

(Gottfried Perz) □

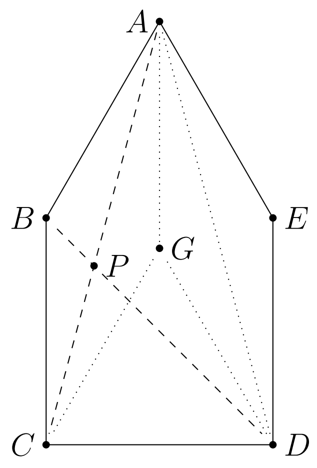
Lösung 2. Wegen der rechten Winkel in C und D ist $BCDE$ ein Quadrat und daher ABE ein gleichseitiges Dreieck mit gleicher Seitenlänge. Somit gilt $\overline{EA} = \overline{EB} = \overline{ED}$. Daher ist E Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABD. Wegen $\sphericalangle AEB = 60^\circ$ gilt also nach Randwinkelsatz

$$\sphericalangle ADB = \frac{\sphericalangle AEB}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Verschiebt man das gleichseitige Dreieck ABE so, dass B auf C und E auf D abgebildet wird, dann erhält man als Bild des Punktes A den innerhalb des Quadrats $BCDE$ liegenden dritten Eckpunkt G des gleichseitigen Dreiecks CDG, dessen Seitenlänge mit der des Fünfecks $ABCDE$ und damit auch mit der Länge der Schiebestrecke $\overline{AG}$ übereinstimmt. Daraus folgt $\overline{GA} = \overline{GC} = \overline{GD}$, also ist G Umkreismittelpunkt des Dreiecks ACD. Nach Randwinkelsatz gilt daher auch

$$\sphericalangle CAD = \frac{\sphericalangle CGD}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Das bedeutet wegen $\sphericalangle PAD = \sphericalangle CAD = \sphericalangle ADB = \sphericalangle ADP = 30^\circ$, dass das Dreieck ADP ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis AD ist. Daraus folgt $\overline{PA} = \overline{PD}$.



(Gottfried Perz) □