47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

16. Juni 2016

1. Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit zwei verschiedenen positiven Teilern, die von $\frac{n}{3}$ gleich weit entfernt sind.

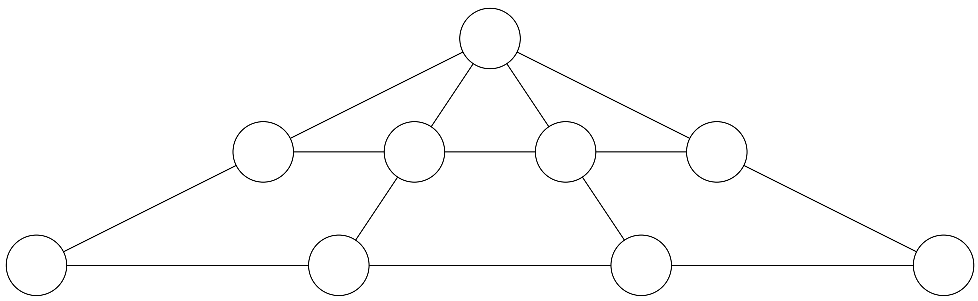
(Richard Henner)

2. Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $x \neq -1$, $y \neq -1$ und mit $xy = 1$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$$

(Karl Czakler)

3. Wir betrachten die folgende Figur:



Wir suchen Beschriftungen der neun Felder in der Figur mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 9$. Dabei soll jede dieser Zahlen genau einmal verwendet werden. Weiters sollen die sechs Summen von jeweils drei bzw. vier Zahlen längs der eingezeichneten geraden Verbindungen gleich sein.
Man gebe eine solche Beschriftung an.
Man zeige, dass bei allen solchen Beschriftungen im obersten Feld die selbe Zahl steht.
Wie viele solche Beschriftungen gibt es insgesamt? (Zwei Beschriftungen sind verschieden, wenn sie sich in mindestens einem Feld unterscheiden.)

(Walther Janous)

4. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten C und D. Weiters sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Man beweise, dass die Strecken PA und PD gleich lang sind.

(Gottfried Perz)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.