Geometrie-Wettbewerb 2016 - Lösungen

Beispiel 1 (3 Punkte)**.** *Es seien k und l zwei Kreise, welche sich in A und B schneiden. Es sei P ein Punkt auf k, PA und PB schneiden l jeweils ein zweites Mal in Q bzw. R.*
Zeige: QR steht normal auf den Durchmesser von k, der P enthält.

Beweis. Der Mittelpunkt von k sei mit O bezeichnet. Die Winkel $\angle APO$ und $\angle\frac{1}{2}AOP$ ergänzen sich auf $90°$. Aus dem Zentriwinkelsatz folgt $\angle\frac{1}{2}AOP = \angle ABP$. Mit dem Peripheriewinkelsatz im Sehnenviereck $ABPQ$ erhält man $\angle ABP = \angle PQR$. Daher ergänzen sich $\angle PQR$ und $\angle APO$ auf $90°$. Daraus folgt, dass QR normal auf PO steht. □

Beispiel 2 (4 Punkte)**.** *Es sei D ein Punkt auf dem Umkreis K eines Dreiecks ABC. Die Kreise k_A, k_B und k_C berühren jeweils den Umkreis von innen in D, sowie die Seiten BC, AC bzw. AB in den Punkten P, Q bzw. R.*
Zeige: AP, BQ bzw. CR schneiden sich in einem Punkt.

Beweis. Es bezeichne φ_A die zentrische Streckung mit Zenrum D, die k_A auf K abbildet. Das Bild von P unter φ_A sei mit X bezeichnet. Die Tangente an K durch X muss parallel zu der Tangente an k_A durch P sein, also zu BC. Daher liegt X auf der Streckensymmetrale von BC. Da k_A den Kreis K von innen berührt, muss der Streckungsfaktor von φ_A positiv sein. Der Punkt P liegt daher zwischen seinem Bild X und dem Zentrum D; BC trennt also D und X. Nach dem Südpolsatz liegt X deshalb auf der Winkelsymmetrale von $\angle BDC$. Aus dem Satz von Apollonius folgt nun, dass $\frac{BD}{CD} = \frac{BP}{CP}$.
Mit zyklisch vertauschter Argumentation erhält man $\frac{AD}{CD} = \frac{AQ}{CQ}$ und $\frac{AD}{BD} = \frac{AR}{BR}$.
Daraus folgt
$$\frac{BP}{CP} \cdot \frac{AQ}{CQ} \cdot \frac{AR}{BR} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{AD}{CD} \cdot \frac{AD}{BD} = 1.$$
Weil P, Q und R alle innerhalb der Seiten von ABC liegen, folgt aus dem Satz von Ceva, dass AP, BQ bzw. CR sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden. □