47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene — Lösungen

25./26. Mai 2016

Aufgabe 1. *Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, sodass für alle x, $y \in \mathbb{Q}^+$*

$$f\Big(\frac{x}{y} + y\Big) = \frac{f(x)}{f(y)} + f(y) + \alpha x$$

gilt.

Dabei bezeichnet $\mathbb{Q}^+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen.

(Walther Janous)

Lösung 1. Wir setzen $y = x$ und erhalten

$$f(x+1) = 1 + f(x) + \alpha x. \tag{1}$$

Weiters setzen wir $y = 1$ und erhalten

$$f(x+1) = \frac{f(x)}{f(1)} + f(1) + \alpha x. \tag{2}$$

Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt

$$f(x)\Big(1 - \frac{1}{f(1)}\Big) = f(1) - 1.$$

Da die Funktion f wegen (1) nicht konstant sein kann, muss $f(1) = 1$ gelten. Mit Induktion erhält man damit aus der Gleichung (1)

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}x(x-1) + x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{Z}^+. \tag{3}$$

Daraus ergeben sich insbesondere $f(2) = \alpha + 2$ und $f(4) = 6\alpha + 4$. Wir setzen nun in der ursprünglichen Gleichung $x = 4$ und $y = 2$ und erhalten nach Vereinfachung

$$\alpha^2 - 2\alpha = 0.$$

Also muss $\alpha = 2$ gelten, damit es Lösungen gibt. Wir betrachten von jetzt an nur mehr diesen Fall.

Aus (3) folgt $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{Z}^+$. Mittels Induktion und aus (1) folgern wir, dass, wenn $f(x+n) = (x+n)^2$ für ein $x \in \mathbb{Q}^+$ und ein $n \in \mathbb{Z}^+$ gilt, daraus $f(x) = x^2$ folgt.

Es sei nun $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ mit a, $b \in \mathbb{Z}^+$. Wir setzen $x = a$ und $y = b$ und erhalten

$$f\Big(\frac{a}{b} + b\Big) = \frac{a^2}{b^2} + b^2 + 2a = \Big(\frac{a}{b} + b\Big)^2.$$

Also gilt nach obiger Bemerkung auch $f(\frac{a}{b}) = (\frac{a}{b})^2$. Die Probe zeigt, dass $f(x) = x^2$ auch wirklich eine Lösung ist.

Insgesamt gibt es also keine Lösung für $\alpha \neq 2$ und die Lösung $f(x) = x^2$ für $\alpha = 2$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Wir setzen $x = y$ in die gegebene Funktionalgleichung und erhalten

$$f(y+1) = 1 + f(y) + \alpha y$$

für alle $y \in \mathbb{Q}^+$.

Damit gilt für $y \in \mathbb{Z}^+$, dass

$$\begin{aligned} f(y) &= f(1) + \sum_{k=1}^{y-1} (f(k+1) - f(k)) \\ &= f(1) + \sum_{k=1}^{y-1} (\alpha k + 1) = f(1) + y - 1 + \frac{\alpha y(y-1)}{2}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir $f(2) = f(1) + 1 + \alpha$ sowie $f(3) = f(1) + 2 + 3\alpha$. Wir setzen nun $x = 2$ und $y = 1$ in die Funktionalgleichung und erhalten

$$f(1) + 2 + 3\alpha = f(3) = \frac{f(2)}{f(1)} + f(1) + 2\alpha = \frac{f(1) + 1 + \alpha}{f(1)} + f(1) + 2\alpha,$$

was zu

$$1 + \alpha = \frac{1 + \alpha}{f(1)}$$

und damit $f(1) = 1$ äquivalent ist.

Weiter wie in Lösung 1.

(Clemens Heuberger) $\square$

Lösung 3. Wie in Lösung 1 erhalten wir $f(1) = 1$.

Aus (1) folgt für alle $n \in \mathbb{Z}^+$, dass

$$\begin{aligned} f(x+2) &= f(x+1) + 1 + \alpha(x+1), \\ &\vdots \\ f(x+n) &= f(x+n-1) + 1 + \alpha(x+n-1). \end{aligned}$$

Addition dieser Gleichungen und von (1) führt auf

$$f(x+n) = f(x) + n + \alpha n x + \alpha \cdot \frac{n(n-1)}{2}. \tag{4}$$

Mit $x = 1$ ergibt sich daraus

$$f(n+1) = \frac{\alpha n(n+1) + 2n}{2} + 1,$$

d. h.

$$f(n+1) = \frac{(\alpha n + 2)(n+1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}^+$. Wir halten fest, dass diese Gleichung wegen $f(1) = 1$ auch für $n = 0$ gilt. Durch Indexverschiebung erhalten wir

$$f(n) = \frac{(\alpha n + 2 - \alpha)n}{2}$$

für $n \in \mathbb{Z}^+$.

Es seien p, $q \in \mathbb{Z}^+$. Mit Hilfe der Funktionalgleichung für $x = p$ und $y = q$ erhalten wir

$$f\left(\frac{p}{q} + q\right) = \frac{f(p)}{f(q)} + f(q) + \alpha p,$$

also
$$f\Big(\frac{p}{q}+q\Big)=\frac{f(p)}{f(q)}+\frac{(\alpha q+2-\alpha)q}{2}+\alpha p.$$
Dies und (4) für $x=p/q$ und $n=q$ ergeben
$$f\Big(\frac{p}{q}+q\Big)=f\Big(\frac{p}{q}\Big)+q+\alpha q\Big(\frac{p}{q}\Big)+\alpha\cdot\frac{q(q-1)}{2}$$
und führen nach kurzer Vereinfachung auf
$$f\Big(\frac{p}{q}\Big)=\frac{f(p)}{f(q)}.$$
Folglich haben wir
$$f\Big(\frac{p}{q}\Big)=\frac{(\alpha p+2-\alpha)p}{(\alpha q+2-\alpha)q}. \tag{5}$$
Damit können wir $f(2)$ auf zwei Arten bestimmen, nämlich durch $p=4$ und $q=2$ in (5) als
$$f\Big(\frac{4}{2}\Big)=\frac{2\cdot(3\alpha+2)}{\alpha+2}$$
bzw. durch $p=6$ und $q=3$ in (5) als
$$f\Big(\frac{6}{3}\Big)=\frac{5\alpha+2}{\alpha+1},$$
woraus sich
$$\frac{2\cdot(3\alpha+2)}{\alpha+2}=\frac{5\alpha+2}{\alpha+1}$$
mit den zwei Lösungen $\alpha_1=0$ oder $\alpha_2=2$ ergibt, von denen nur die zweite von Interesse ist. Sie führt auf
$$f\Big(\frac{p}{q}\Big)=\Big(\frac{p}{q}\Big)^2.$$
Folglich ist $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{Q}^+$, im Fall von $\alpha=2$ die einzig mögliche Lösungsfunktion, die man durch Probe verifiziert. Dagegen gibt es für $\alpha\neq 2$ keine Lösung.

(Walther Janous, Clemens Heuberger) □

Lösung 4. Wie in Lösung 3 erhalten wir
$$\begin{aligned} f(1)&=1,\\ f(x+n)&=f(x)+n+\alpha nx+\alpha\cdot\frac{n(n-1)}{2},\\ f(n)&=\frac{(\alpha n+2-\alpha)n}{2}\end{aligned}$$
für $x\in\mathbb{Q}^+$ und $n\in\mathbb{Z}^+$.

Aus der Funktionalgleichung ergibt sich, wenn man x durch nx und y durch n ersetzt,
$$f(x+n)=\frac{f(nx)}{f(n)}+f(n)+\alpha nx.$$
Durch Vergleich der Darstellungen von $f(x+n)$ folgt
$$f(x)+n+\alpha nx+\alpha\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{f(nx)}{f(n)}+\frac{(\alpha n+2-\alpha)n}{2}+\alpha nx,$$

d.h.

$$f(x) = \frac{f(nx)}{f(n)}$$

für $x \in \mathbb{Q}^+$ und $n \in \mathbb{Z}^+$.

Insbesondere bedeutet das für $x = p/q$ für p, $q \in \mathbb{Z}^+$ und $n = q$, dass

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{f(p)}{f(q)},$$

also

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{(\alpha p + 2 - \alpha)p}{(\alpha q + 2 - \alpha)q} = \frac{\alpha p^2 + (2-\alpha)p}{\alpha q^2 + (2-\alpha)q}.$$

Die rechte Seite ist eine rationale Funktion in p und q, die aufgrund der linken Seite homogen vom Grad 0 sein muss. Eine rationale Funktion ist genau dann homogen vom Grad 0, wenn jeder Summand ihres Zählers und Nenners denselben Grad hat. Daher ist die rechte Seite ist nur für $\alpha = 2$ oder für $\alpha = 0$ homogen vom Grad 0. Letzteres ist verboten, also gibt es nur für $\alpha = 2$ Lösungen. In diesem Fall gilt

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^2}{q^2}.$$

Daraus erhalten wir $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{Q}^+$. Durch Probe erhalten wir, dass $f(x) = x^2$ tatsächlich Lösung ist.

Somit gibt es nur für $\alpha = 2$ eine Lösung, nämlich $f(x) = x^2$.

(Florian Fürnsinn, Walther Janous) □

Lösung 5. Wir zeigen zunächst, dass f streng monoton wachsend und insbesondere injektiv ist: Dazu seien y, z gegeben mit $z > y$. Wir setzen $x := (z-y)y > 0$ und erhalten

$$f(z) = f\left(\frac{x}{y} + y\right) = \frac{f(x)}{f(y)} + f(y) + \alpha x > f(y).$$

Nun ersetzen wir in der Angabe x durch $xy > 0$ und erhalten

$$f(x+y) = \frac{f(xy)}{f(y)} + f(y) + \alpha xy. \tag{6}$$

In Gleichung (6) können wir x und y vertauschen und erhalten

$$f(x+y) = \frac{f(xy)}{f(x)} + f(x) + \alpha xy. \tag{7}$$

Durch Elimination von $f(x+y)$ aus (6) und (7) erhalten wir

$$f(xy) \cdot \frac{f(x) - f(y)}{f(x)f(y)} = f(x) - f(y).$$

Wegen der Injektivität von f folgt daraus $f(xy) = f(x)f(y)$ für $x \neq y$.

Durch Einsetzen in (6) folgt $f(x+y) = f(x) + f(y) + \alpha xy$ für $x \neq y$.

Nun betrachten wir x, y mit $x \neq y^2$. Dann erhalten wir wegen $\frac{x}{y} + y \neq y$, dass

$$\frac{f(x)}{f(y)} + f(y) + \alpha x = f\left(\frac{x}{y} + y\right) = \frac{f\left(\frac{x}{y} + y\right) f(y)}{f(y)} = \frac{f(x+y^2)}{f(y)} = \frac{f(x) + f(y^2) + \alpha x y^2}{f(y)}.$$

Daraus folgt durch Vereinfachen

$$f(y)^2 + \alpha x f(y) = f(y^2) + \alpha x y^2 \qquad \text{für } x \neq y^2.$$

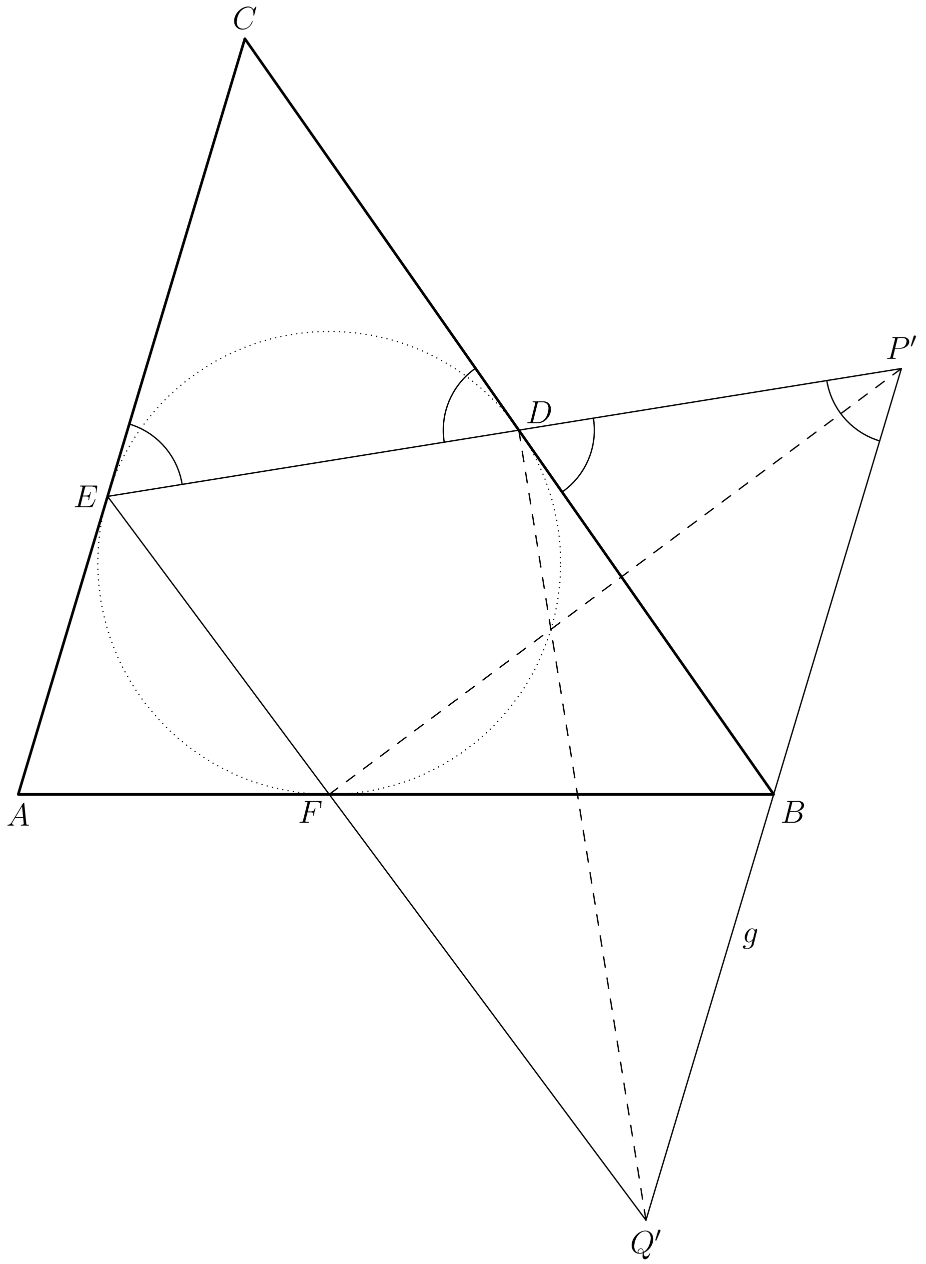

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Nun erhalten wir durch Vergleich der Koeffizienten bei x, dass $f(y) = y^2$. Die Probe ergibt, dass dies genau für $\alpha = 2$ eine Lösung ist.

Bemerkung: Dieser Lösungsweg funktioniert auch, wenn in der Angabe überall $\mathbb{Q}^+$ durch $\mathbb{R}^+$ ersetzt wird.

(Gerhard Kirchner) □

Aufgabe 2. *Es sei ABC ein Dreieck. Sein Inkreis berühre die Seiten BC, CA und AB in den Punkten D, E bzw. F. Der Schnittpunkt der Geraden ED mit der Normalen auf EF durch F sei P und der Schnittpunkt der Geraden EF mit der Normalen auf ED durch D sei Q.*

Man beweise: Der Punkt B ist Mittelpunkt der Strecke PQ.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Sei g die Parallele zu AC durch B, vgl. Abbildung 1. Die Schnittpunkte von g mit ED und EF werden mit P' bzw. Q' bezeichnet.

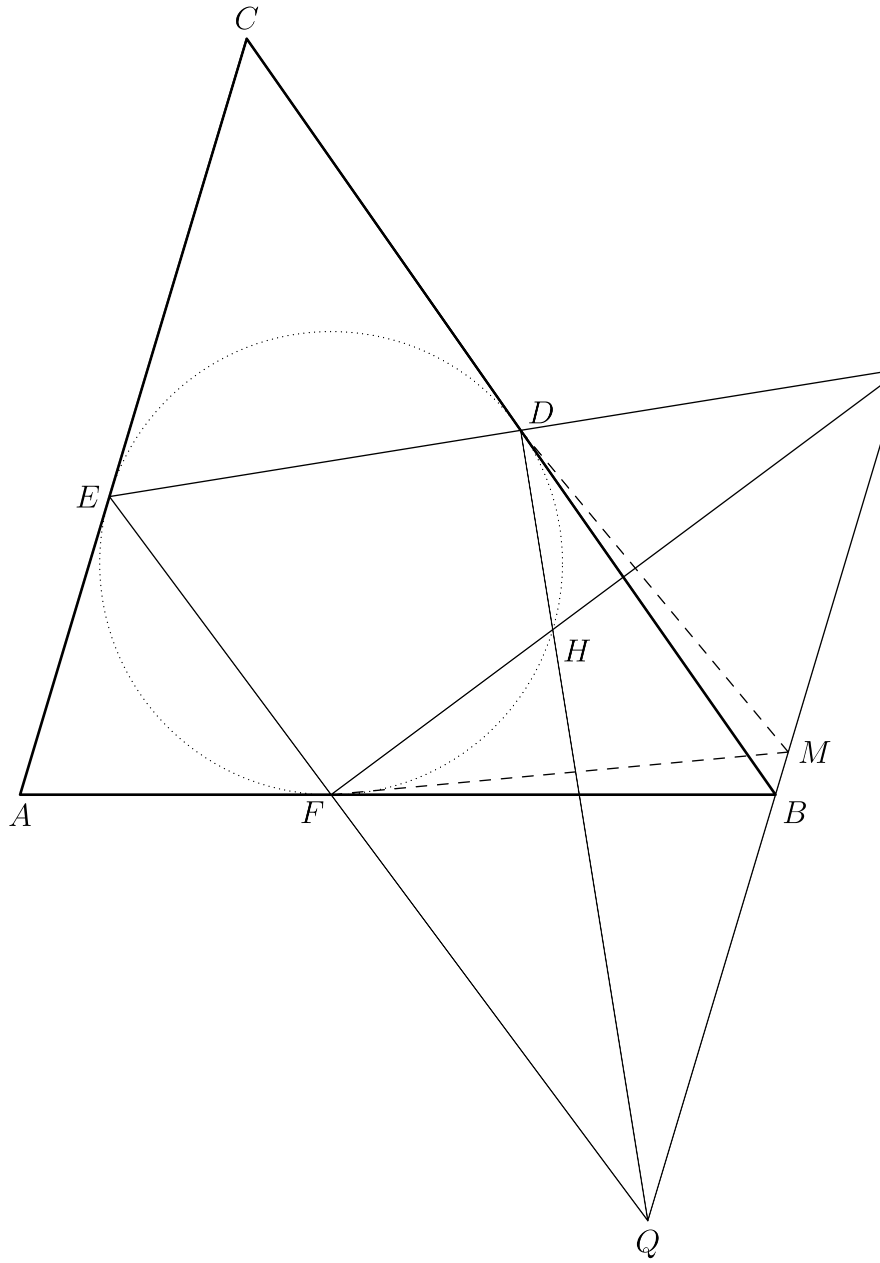

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 2

Es gilt

$$\sphericalangle DP'B = \sphericalangle DEC = \sphericalangle EDC = \sphericalangle BDP'$$

(Parallelwinkel, gleichschenkeliges Dreieck, Scheitelwinkel). Daher ist das Dreieck DBP' gleichschenkelig. Insbesondere gilt $BD = BP'$. Analog erhalten wir $BF = BQ'$.

Da $BD = BF$ (Tangenten an den Inkreis), liegen D und F auf einem Thaleskreis über dem Durchmesser $P'Q'$ mit Mittelpunkt B. Daher steht $P'F$ normal auf EF und $Q'D$ normal auf ED, woraus $P = P'$ und $Q = Q'$ folgt.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Sei H der Schnittpunkt von PF und QD, vgl. Abbildung 2. Wegen der rechten Winkel $\sphericalangle EDH$ und $\sphericalangle HFE$ ist HE ein Durchmesser des Inkreises von ABC.

Wir betrachten nun das degenerierte Sechseck $HDDEFF$. Nach dem Satz von Pascal liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden, also liegen Q als Schnittpunkt der Seiten HD und EF, B als Schnittpunkt von FF und DD (also der Tangenten in F und D) sowie P als Schnittpunkt von FH und DE auf einer Geraden.

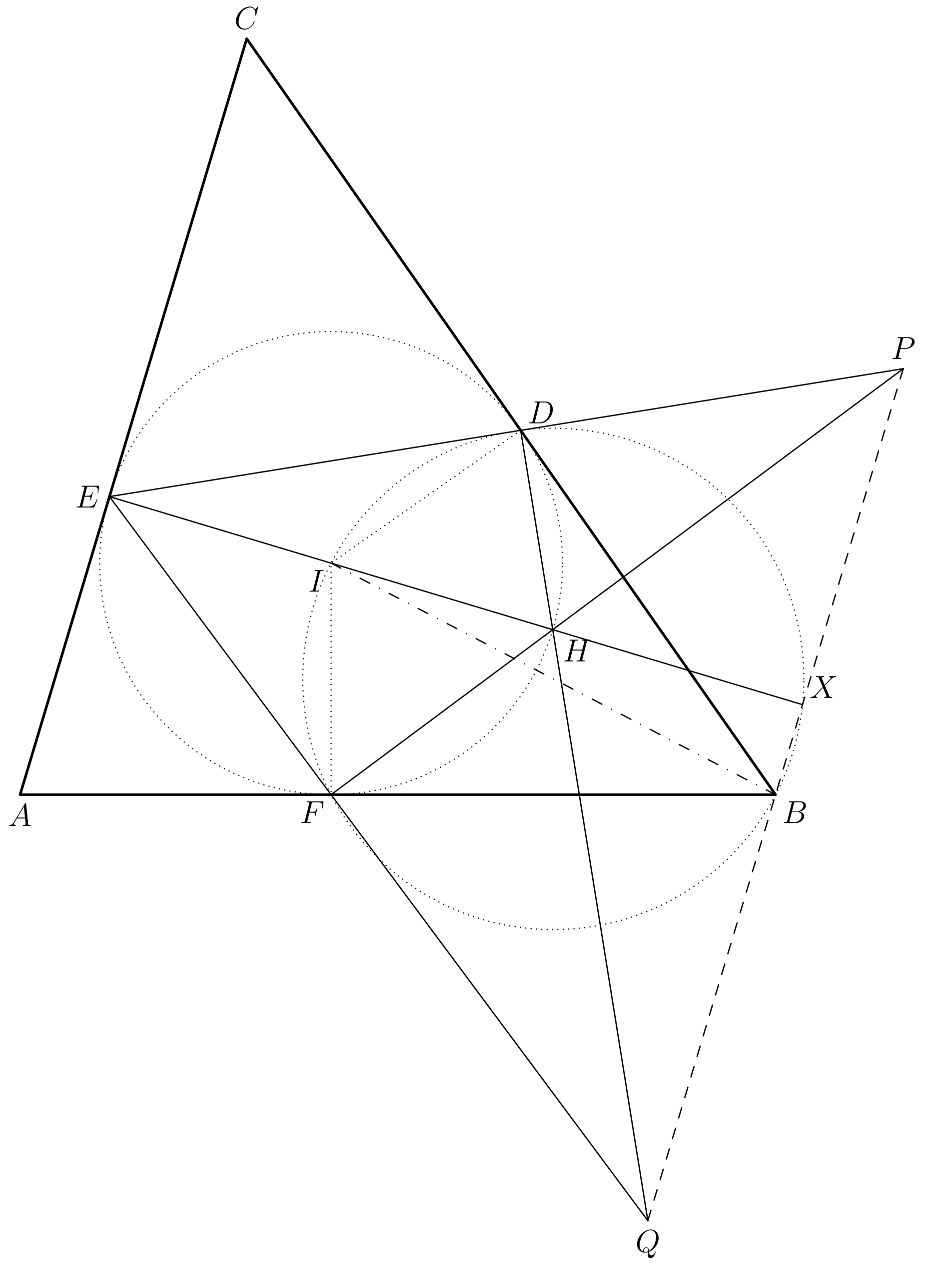

Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 3

Da $\sphericalangle QDP = \sphericalangle PFQ = 90°$, liegen die Punkte P, D, F und Q auf einem Thaleskreis über der Strecke PQ mit Mittelpunkt M. Da $BD = BF$ und $BM = DM$ und da B und M beide auf PQ liegen, muss $M = B$ gelten.

(Erich Windischbacher, Karl Czakler) □

Lösung 3. Sei H der Schnittpunkt von PF und QD, vgl. Abbildung 3. Wegen der rechten Winkel $\sphericalangle EDH$ und $\sphericalangle HFE$ ist HE ein Durchmesser des Inkreises von ABC. Sei weiters X der Schnittpunkt von EH und PQ. Dann ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks EPQ und X, D und F die dazugehörigen Höhenfußpunkte. Der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC ist gleichzeitig ein Höhenabschnittshalbierungspunkt. Damit liegen I, F, X und D am Feuerbachkreis des Dreiecks EPQ.

Die Punkte I, F, D und B liegen wegen der rechten Winkel in F und D auf einem Kreis. Dieser Kreis ist aber genau der Feuerbachkreis des Dreiecks EPQ. Aus demselben Grund ist B der I diametral gegenüberliegende Punkt am Feuerbachkreis des Dreiecks EPQ.

Nun ist bekannt, dass am Feuerbachkreis einem Höhenabschnittshalbierungspunkt der entsprechende Seitenmittelpunkt diametral gegenüberliegt (rechter Winkel in X). Daher ist B der Halbierungspunkt

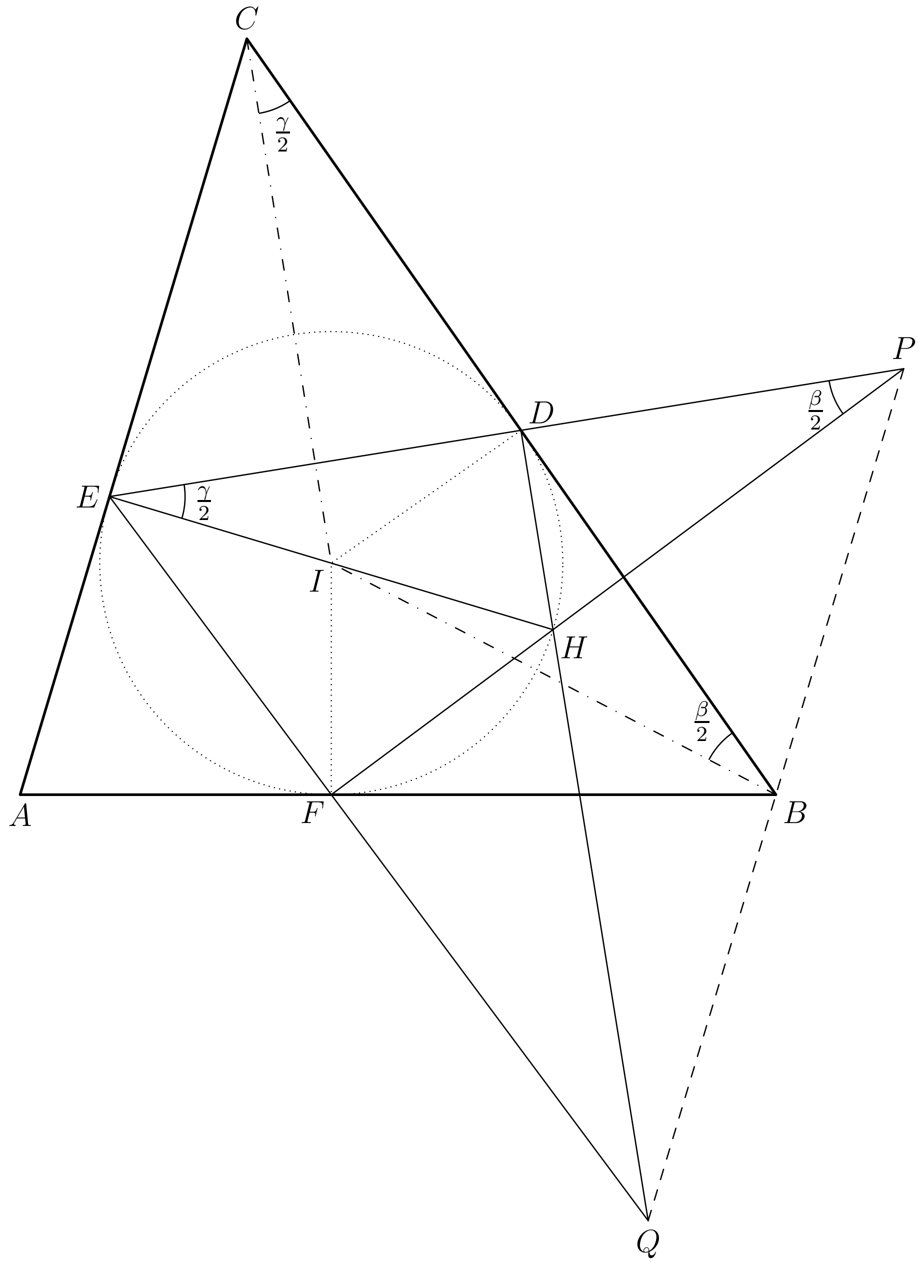

Abbildung 4: Aufgabe 2, Lösung 4

der Seite PQ.

(Sara Kropf) □

Lösung 4. Wir bezeichnen den Inkreismittelpunkt mit I, den Inkreisradius mit ρ, den Schnittpunkt von FP und DQ mit H und die Dreieckswinkel wie üblich mit α, β, γ, vgl. Abbildung 4. Wegen der rechten Winkel $\sphericalangle EDH$ und $\sphericalangle HFE$ ist HE ein Durchmesser des Inkreises von ABC.

Da $CD = CE$ ist das Dreick ECD gleichschenkelig und damit $\sphericalangle CDE = \sphericalangle DEC = (\alpha + \beta)/2$. Analog ist $\sphericalangle FEA = (\beta + \gamma)/2$. Damit ist $\sphericalangle FED = 180° - \sphericalangle FEA - \sphericalangle DEC = (\alpha + \gamma)/2$.

Damit erhalten wir $\sphericalangle BDP = \sphericalangle CDE = (\alpha + \beta)/2$ und $\sphericalangle FPE = 90° - \sphericalangle FED = \beta/2$. Weiter ist $\sphericalangle HED = \sphericalangle HEC - \sphericalangle DEC = \gamma/2$.

Damit geht das Dreieck PHE bei Drehstreckung um den Höhenfußpunkt D in das Dreieck BIC über. Daraus ergibt sich

$$\frac{PD}{BD} = \frac{ED}{CD},$$

daher sind zusammen mit $\sphericalangle BDP = \sphericalangle EDC$ die Dreiecke BDP und CDE ähnlich und insbesondere gleichschenkelig.

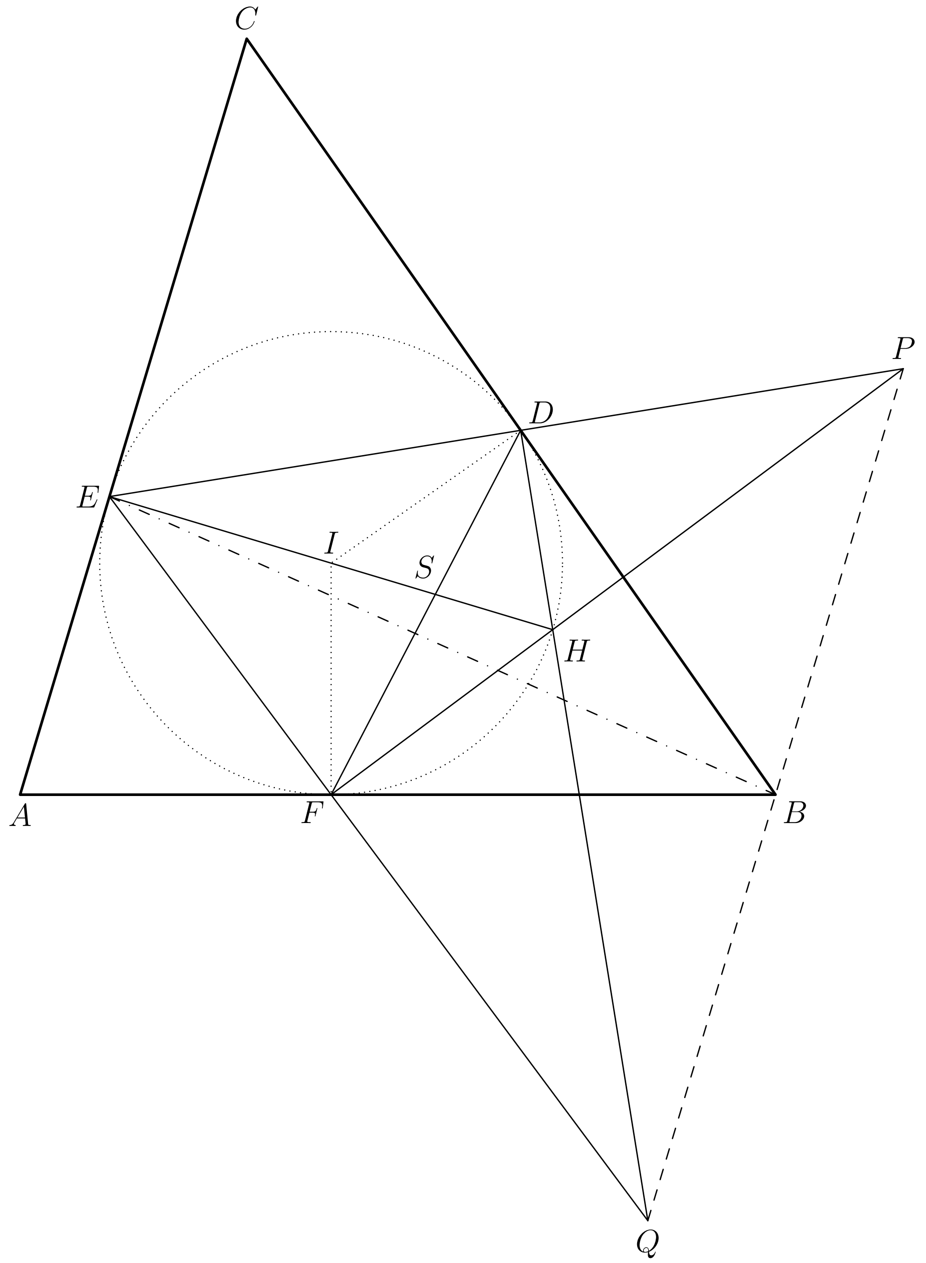

Abbildung 5: Aufgabe 2, Lösung 5

Wir erhalten damit $BP = BD$ und $\sphericalangle DBP = \gamma$.

Analog erhalten wir $QB = BF$ und $\sphericalangle QBF = \alpha$.

Damit ist $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle PBD + \sphericalangle DBF + \sphericalangle FBQ = \gamma + \beta + \alpha = 180°$ und $BP = BD = BF = BQ$.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 5. Wie in Lösung 4 sehen wir, dass der Schnittpunkt H von FP und DQ auf dem Inkreis liegt. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von FD und EH mit S, vgl. Abbildung 5.

Da der Schnittpunkt zweier Seiten eines Sehnenvierecks stets auf der Polaren des Diagonalenschnittpunkts eines Sehnenvierecks liegt, liegen P und Q auf der Polaren von S. Als Punkt auf der Strecke DF liegt S auf der Polaren von B und damit auch B auf der Polaren von S.

Somit liegen P, B und Q auf der Polaren von S und damit auf derselben Geraden.

Da B der Schnittpunkt zweier Tangenten an den Umkreis von DEF ist, ist EB die Symmediane des Dreiecks DEF. Da $FDPQ$ ein Sehnenviereck ist (zwei rechte Winkel über PQ), sind FD und QP antiparallel bezüglich der Geraden ED und EF. Somit ist die Symmediane EB des Dreiecks EDF die

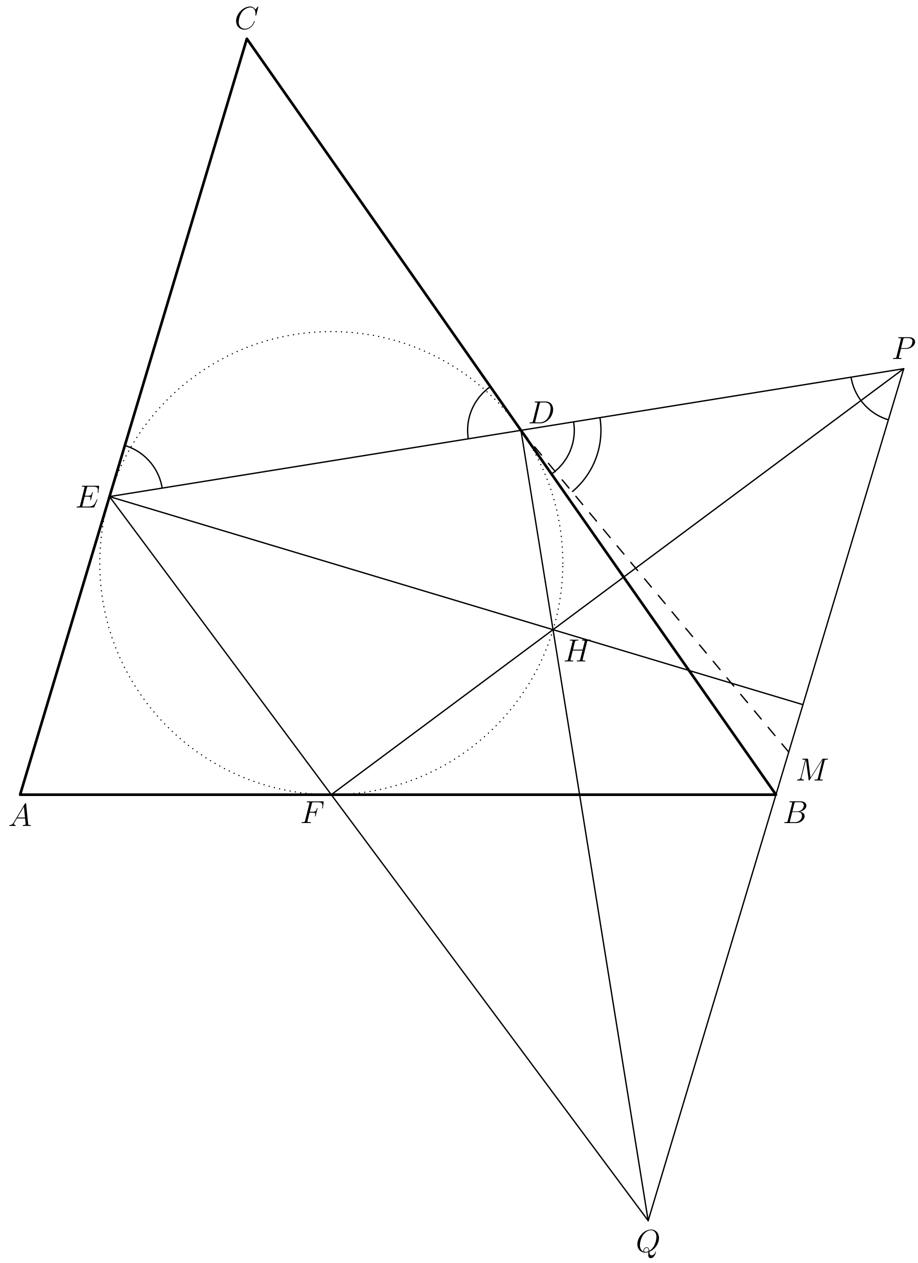

Abbildung 6: Aufgabe 2, Lösung 6

Schwerlinie des Dreiecks EPQ (da Symmedianen und Schwerlinien isogonal konjugiert sind). Daher ist B als Schnittpunkt von Schwerlinie und Seite die Mitte der Seite PQ.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 6. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von PF und DQ mit H, vgl. Abbildung 6. Wie in Lösung 3 sehen wir, dass EH ein Durchmesser des Inkreises ist und daher normal auf AC steht.

Nach Konstruktion ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks PQE, weshalb auch EH normal auf PQ steht. Daher ist PQ parallel zu AC.

Sei nun M der Mittelpunkt von PQ. Zu zeigen ist, dass $M = B$ gilt. Da $\sphericalangle QDP = \sphericalangle QFP = 90°$, liegen die Punkte P, D, F, Q auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser PQ und mit dem Mittelpunkt M. Daher ist das Dreieck DMP gleichschenkelig mit $MD = MP$. Daher gilt

$$\sphericalangle MDP = \sphericalangle MPD = \sphericalangle DEC = \sphericalangle CDE = \sphericalangle BDP$$

(wegen gleichschenkeligem Dreieck, Parallelwinkel, Winkel im gleichschenkeligen Dreieck ECD, Scheitelwinkel). Daher liegt M auf der Geraden BC.

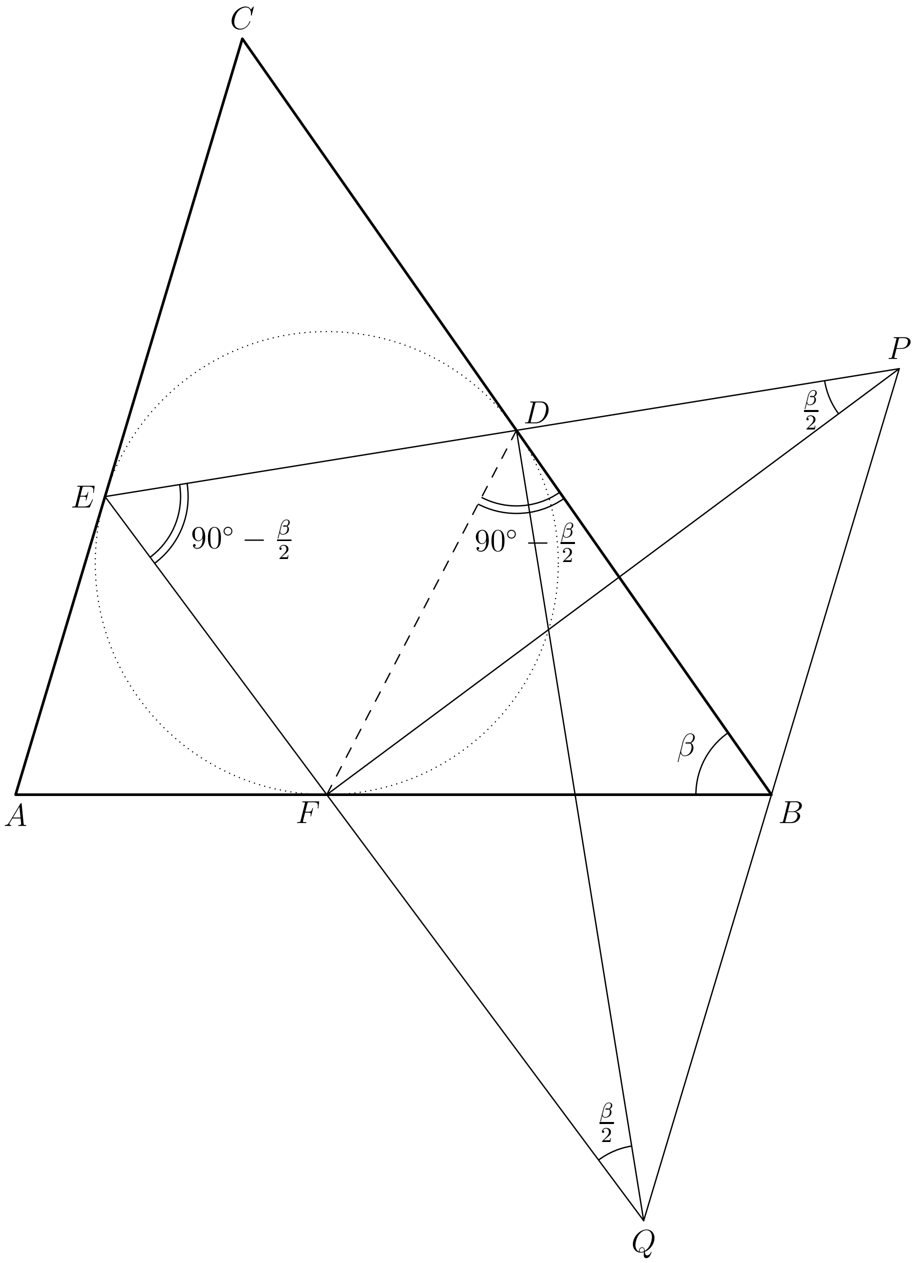

Abbildung 7: Aufgabe 2, Lösung 7

Analog folgert man, dass M auf der Geraden AB liegt. Daraus folgt $M = B$.

(Karl Czakler) □

Lösung 7. Wir setzen $\beta := \sphericalangle ABC$, vgl. Abbildung 7. Da das Dreieck DBF gleichschenklig ist, folgt $\sphericalangle FDB = 90° - \frac{\beta}{2}$. Nach dem Sehnen-Tangentenwinkelsatz ist deshalb auch $\sphericalangle DEF = 90° - \frac{\beta}{2}$. Wir betrachten den Kreis k mit Mittelpunkt B durch D und F. Der Zentriwinkel zur Sehne DF ist β. Da $\sphericalangle EPF = \sphericalangle EQD = \frac{\beta}{2}$ wegen der rechten Winkel in D und E gilt, sind $\sphericalangle EPF$ und $\sphericalangle EQD$ Peripheriewinkel über dieser Sehne, das heißt P und Q liegen ebenfalls auf k. Nach dem Satz von Thales ($\sphericalangle QDP = \sphericalangle QFP = 90°$) ist PQ ein Durchmesser von k, das heißt der Kreismittelpunkt B ist der Mittelpunkt von PQ.

(Gerhard Kirchner, Erich Windischbacher) □

Aufgabe 3. *Wir betrachten Anordnungen der Zahlen* 1 *bis* 64 *auf den Feldern eines* 8×8*-Schachbretts, wobei jedes Feld genau eine Zahl enthält und jede Zahl genau einmal vorkommt.*

Eine Zahl in einer derartigen Anordnung heißt super-plus-gut*, falls sie die größte Zahl in ihrer Zeile und gleichzeitig die kleinste Zahl in ihrer Spalte ist.*

Man beweise oder widerlege jeweils:

(a) In jeder derartigen Anordnung gibt es mindestens eine super-plus-gute Zahl.

(b) In jeder derartigen Anordnung gibt es höchstens eine super-plus-gute Zahl.

(Gerhard J. Woeginger)

Lösung 1. (a) Das ist falsch. Man kann zum Beispiel die Zahlen 1 bis 8 entlang der Hauptdiagonale platzieren, und die Zahlen 57 bis 64 entlang der Nebendiagonale:

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{1} & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \mathbf{57} \\
15 & \mathbf{2} & 16 & 17 & 18 & 19 & \mathbf{58} & 20 \\
21 & 22 & \mathbf{3} & 23 & 24 & \mathbf{59} & 25 & 26 \\
27 & 28 & 29 & \mathbf{4} & \mathbf{60} & 30 & 31 & 32 \\
33 & 34 & 35 & \mathbf{61} & \mathbf{5} & 36 & 37 & 38 \\
39 & 40 & \mathbf{62} & 41 & 42 & \mathbf{6} & 43 & 44 \\
45 & \mathbf{63} & 46 & 47 & 48 & 49 & \mathbf{7} & 50 \\
\mathbf{64} & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & \mathbf{8}.
\end{array}$$

Somit sind die Zahlen von 1 bis 8 die Spaltenminima, während die Zahlen von 57 bis 64 die Zeilenmaxima sind. Daher ist keine Zahl gleichzeitig Spaltenminimum und Zeilenmaximum, also ist keine Zahl super-plus-gut.

(b) Das ist richtig. Wir bezeichnen die Zahl in der a-ten Zeile und b-ten Spalte mit $F(a, b)$. Nehmen wir an, es gäbe zwei super-plus-gute Zahlen, und seien (i, j) und (r, s) die Koordinaten dieser beiden Zahlen. Da alle Zahlen verschieden sind, sind die Zeilenmaxima und Spaltenminima eindeutig. Daher kann keine Zeile und keine Spalte mehr als eine super-plus-gute Zahl enthalten, also muss $i \neq r$ und $j \neq s$ gelten. Dann gilt

$$\begin{array}{ll}
F(i,j) > F(i,s) & \text{(da } F(i,j) \text{ Zeilenmaximum),} \\
F(i,j) < F(r,j) & \text{(da } F(i,j) \text{ Spaltenminimum),} \\
F(r,s) > F(r,j) & \text{(da } F(r,s) \text{ Zeilenmaximum),} \\
F(r,s) < F(i,s) & \text{(da } F(r,s) \text{ Spaltenminimum).}
\end{array}$$

Diese vier Ungleichungen führen zum Widerspruch:

$$F(i,j) > F(i,s) > F(r,s) > F(r,j) > F(i,j).$$

(Gerhard J. Woeginger) □

Lösung 1a. (a) Betrachte die Anordnung

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{64} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
8 & \mathbf{63} & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\
15 & 16 & \mathbf{62} & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\
22 & 23 & 24 & \mathbf{61} & 25 & 26 & 27 & 28 \\
29 & 30 & 31 & 32 & \mathbf{60} & 33 & 34 & 35 \\
36 & 37 & 38 & 39 & 40 & \mathbf{59} & 41 & 42 \\
43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & \mathbf{58} & 49 \\
50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & \mathbf{57},
\end{array}$$

bei der die größten verfügbaren Zahlen auf der Hauptdiagonale angeordnet sind. Diese Zahlen sind somit gleichzeitig Zeilen- und Spaltenmaxima (und daher insbesondere nicht Spaltenminima). Daher enthält diese Anordnung keine Zahl, die gleichzeitig Zeilenmaximum und Spaltenminimum ist, also keine super-plus-gute Zahl.

(b) Vgl. Lösung 1.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2. (a) Es sei $n = 8$. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufälligen Anordnung der 64 Zahlen, die Zahl in Position $(1,1)$ eine super-plus-gute Zahl ist. Dazu muss unter den $2n-1$ Zahlen in der ersten Zeile und der ersten Spalte die mittlere an dieser Stelle stehen, während die kleineren in der ersten Zeile sind und die größeren in der ersten Spalte sind. Das ergibt die Wahrscheinlichkeit $\frac{(n-1)!^2}{(2n-1)!}$.

Der Erwartungswert der Anzahl von super-plus-guten Zahlen ist daher

$$n^2 \frac{(n-1)!^2}{(2n-1)!} = \frac{1}{\frac{(2n-1)!}{n!^2}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\binom{2n-1}{n}} < 1.$$

Da der Erwartungswert kleiner als eins ist, kann es nicht in jeder Anordnung eine super-plus-gute Zahl geben.

(b) Das ist richtig. Wenn eine Anzahl keine super-plus-gute Zahl enthält, dann ist nichts zu zeigen. Es sei also a eine super-plus-gute Zahl in der Anordnung. Dann sind alle Zahlen in derselben Zeile wie a höchstens so groß wie a. Jedes Spaltenminimum ist daher höchstens a, da es nicht größer als eine Zahl in der betrachteten Zeile sein kann. Analog erhält man, dass jedes Zeilenmaximum mindestens a ist. Daraus ergibt sich, dass eine super-plus-gute Zahl schon a sein muss, also gibt es nur eine wie gewünscht.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Es seien a, b, $c \geq -1$ reelle Zahlen mit $a^3 + b^3 + c^3 = 1$.*
Man beweise:

$$a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 \leq 4.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Karl Czakler)

Lösung 1. Wir setzen $x = a+1, y = b+1$ und $z = c+1$. Dann sind x, y, z nicht negative reelle Zahlen mit $(x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 = 1$. Das ist äquivalent zu

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3(x + y + z) = 4.$$

Die Ungleichung lässt sich in der Form

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + x + y + z - 3 \leq 4,$$

d. h.

$$x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z \leq 4$$

darstellen. Unter Verwendung der Nebenbedingung erhält man

$$x^2 - x + y^2 - y + z^2 - z \leq x^3 + y^3 + z^3 - 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3(x + y + z),$$

und das ist äquivalent zu

$$0 \leq x(x-2)^2 + y(y-2)^2 + z(z-2)^2.$$

Damit ist alles gezeigt.

Gleichheit gilt für x, y, $z \in \{0, 2\}$, d. h. (mit Berücksichtigung der Nebenbedingung) für $a = 1, b = 1$ und $c = -1$ mit allen Permutationen.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wir stellen fest, dass für $x \geq -1$ Folgendes gilt:

$$1 - x - x^2 + x^3 = (1-x)^2(1+x) \geq 0$$

mit Gleichheit für $x = \pm 1$.

Also gilt $x + x^2 \leq 1 + x^3$ für $x = a$, b, c und damit

$$a + a^2 + b + b^2 + c + c^2 \leq 1 + a^3 + 1 + b^3 + 1 + c^3 = 3 + 1 = 4.$$

Da Gleichheit für ± 1 gilt und die Summen der Kuben 1 ist, sind die Gleichheitsfälle die Permutationen von $(1, 1, -1)$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2a. Analog zur Lösung 2 beweisen wir folgende etwas allgemeinere Ungleichung. Es seien a eine positive reelle und n eine positive ganze Zahl. Weiters sollen $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1} \geq -a$ reelle Zahlen mit $\sum_{j=1}^{2n+1} x_j^3 = a^3$ sein. Dann gilt

$$a \cdot \sum_{j=1}^{2n+1} x_j + \sum_{j=1}^{2n+1} x_j^2 \leq (2n+2) \cdot a^2$$

mit Gleichheit genau, wenn $n+1$ der Zahlen x_j den Wert a und die restlichen den Wert $-a$ haben. Denn für $t \geq -a$ gilt

$$a^3 - a^2 t - a t^2 + t^3 = (a-t)^2(a+t) \geq 0$$

mit Gleichheit für $t = \pm a$.

Folglich haben wir $a^2 t + a t^2 \leq a^3 + t^3$ für $t = x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ und damit (nach Summation der $2n+1$ Ungleichungen)

$$a^2 \cdot \sum_{j=1}^{2n+1} x_j + a \cdot \sum_{j=1}^{2n+1} x_j^2 \leq \sum_{j=1}^{2n+1} x_j^3 + (2n+1) \cdot a^3 = (2n+2) \cdot a^3$$

Division durch a ergibt die behauptete Ungleichung.

Da in jeder der $2n+1$ summierten Ungleichungen Gleichheit genau für $\pm a$ gilt und die Summen der $2n+1$ Kuben a^3 ist, ergeben sich die angegebenen Gleichheitsfälle.

(Walther Janous) □

Lösung 3. O.B.d.A. nehmen wir $a \leq b \leq c$ an. Aus der Nebenbedingung folgt sofort $c > 0$. Falls $a \geq 0$, so können wir die Mittelungleichung anwenden und erhalten

$$(a+b+c) + (a^2+b^2+c^2) \leq \frac{3}{\sqrt[3]{3}} + \frac{3}{\sqrt[3]{9}} < 4.$$

Daher können wir annehmen, dass $a < 0$ ist.

Für $-1 < a < 0$ gilt $a^2 + a = a(1+a) < 0$. Wir ersetzen a durch $a' = -1$ und c durch ein $c' > c$. Dann gilt $a^2 + a + c^2 + c < a'^2 + a' + c'^2 + c'$, es reicht daher, die Ungleichung für den Fall $a = -1$ zu behandeln.

Dann ist aber $b + b^2 + c + c^2 \leq 4$ für $b^3 + c^3 = 2$ zu beweisen. Falls $b \geq 0$, so folgt aus der Mittelungleichung $b + b^2 + c + c^2 \leq 4$ mit Gleichheit für $b = c = 1$. Falls $b < 0$, so können wir wie oben $b = -1$ annehmen und haben $c^3 = 3$, aber $c + c^2 = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} < 4$.

Gleichheit gilt also nur für $a = -1$, $b = c = 1$ (oder Permutationen davon).

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 5. *Gegeben sei ein Spielbrett, das aus $n \times n$ quadratischen Feldern besteht, wobei $n \geq 2$ gilt. Felder, die direkt horizontal oder vertikal neben einem Feld liegen, werden als dessen Nachbarn bezeichnet. Zu Beginn sind auf den Feldern k Spielsteine verteilt, wobei sich auf einem Feld auch mehrere oder keine Spielsteine befinden können.*

In jedem Spielzug wählt man nun ein Feld aus, das mindestens so viele Spielsteine wie Nachbarn besitzt und legt auf jedes Nachbarfeld einen dieser Spielsteine. Das Spiel endet, wenn es kein derartiges Feld zur Auswahl gibt.

(a) *Man bestimme das kleinste k, für das das Spiel für jede mögliche Anfangsanordnung und Wahl der Spielzüge nicht endet.*

(b) *Man bestimme das größte k, für das das Spiel für jede mögliche Anfangsanordnung und Wahl der Spielzüge endet.*

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung 1. (a) Wenn auf jedem Feld ein Stein weniger als die Anzahl der Nachbarn liegt, dann gibt es nicht einmal einen ersten Spielzug. Wenn hingegen noch ein Stein mehr im Spiel ist, lässt es sich nach Schubfachschluss in keinem Zug vermeiden, dass auf einem Feld genügend Steine für den nächsten Zug liegen.

Die gesuchte Zahl ist also die Summe aller Nachbaranzahlen minus die Anzahl aller Felder plus 1. Wenn man um die gesamte Anordnung der n^2 Spielfelder noch $4n$ Felder anfügt, dann hat jedes ursprüngliche Feld genau 4 Nachbarn und jedes neue Feld hat dazu einen Nachbarn beigetragen.

Es gilt also $k = (4n^2 - 4n) - n^2 + 1 = 3n^2 - 4n + 1$.

(b) Es ist leicht einzusehen, dass bei einer unbeschränkten Anzahl von Zügen die Steine nach und nach jedes Feld erreichen müssen und somit auch zwischen jedem Paar von Nachbarfeldern Steine ausgetauscht werden: Sonst gäbe es ein dauerhaft inaktives Feld mit einem aktiven Nachbarn, wodurch ein Stein vom aktiven zum inaktiven Feld bewegt wird und sich im Laufe des Spiels beliebig viele Steine im vermeintlich inaktiven Feld ansammeln würden.

Sobald aber zum ersten Mal ein Stein von einem bestimmten Feld an ein bestimmtes anderes geht, kann man diesen Stein dafür reservieren, dass er nur zwischen diesen beiden Feldern hin- und hergeht. Das Spiel bricht also sicher ab, wenn weniger Steine als Nachbarpaare vorhanden sind.

Umgekehrt kann man folgendermaßen vorgehen, wenn mindestens gleichviele Steine wie Nachbarpaare verfügbar sind: Man kann die Felder wie ein Schachbrett schwarz und weiß einfärben und legt auf jedes schwarze Feld soviel Steine wie Nachbarn. Jetzt sieht man, dass es möglich ist, unbegrenzt lange zu spielen, wenn die Steine immer zuerst von allen schwarzen auf die weißen Felder transferiert werden und dann wieder von allen weißen auf die schwarzen.

Die gesuchte größte Zahl ist also die Anzahl der Nachbarpaare minus 1. Die Anzahl der Nachbarpaare ist aber gerade die Hälfte des ersten Ausdruckes in der Rechnung zum ersten Teil und wir erhalten $k = 2n^2 - 2n - 1$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1a. Sei G ein Graph mit m Kanten und N Knoten. Es werden k Steine auf den Knoten verteilt und der Spielverlauf ist wie in der Aufgabe angegeben.

Satz ([1, Theorem 2.3]).

1. Wenn $k > 2m - N$, so ist das Spiel unendlich.
2. Wenn $m < k < 2m - N$, so gibt es Anfangsanordnungen, für die das Spiel endet, und Anfangsanordnungen, für die das Spiel nicht endet.

3. Wenn $k < m$, so ist das Spiel endlich.

In unserem Fall ist $N = n^2$ und $m = 2n^2 - 2n$ (vergleiche Lösung 1) und es ergibt sich alles.

Literatur:

[1] Anders Björner, László Lovász, Peter W. Shor, Chip-firing games on graphs. Eur. J. Comb. **12** (1991), 283–291, `http://dx.doi.org/10.1016/S0195-6698(13)80111-4`.

(Stephan Wagner) □

Aufgabe 6. *Es seien a, b, c ganze Zahlen, für die*

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$$

ganzzahlig ist.

Man beweise: Jede der Zahlen

$$\frac{ab}{c}, \ \frac{ac}{b} \quad \textit{und} \quad \frac{bc}{a}$$

ist eine ganze Zahl.

(Gerhard J. Woeginger)

Lösung 1. Setze $u := ab/c$, $v := ac/b$ und $w := bc/a$. Laut Angabe ist $u + v + w$ ganzzahlig, und man sieht leicht, dass auch $uv + uw + vw = a^2 + b^2 + c^2$ und $uvw = abc$ ganze Zahlen sind.

Laut Vieta sind die rationalen Zahlen u, v, w nun die Wurzeln eines kubischen Polynoms $x^3 + px^2 + qx + r$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Da der Koeffizient von x^3 gleich 1 ist, sind alle diese Wurzeln ganzzahlig.

(Gerhard J. Woeginger) □

Lösung 2. Sei

$$m := \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} = \frac{ab}{c} + (a^2 + b^2)\frac{c}{ab}.$$

Wir schreiben $\frac{ab}{c} = \frac{r}{s}$ für teilerfremde ganze Zahlen r und s. Dann gilt

$$m = \frac{r}{s} + (a^2 + b^2)\frac{s}{r}$$

und daher

$$mrs = r^2 + (a^2 + b^2)s^2. \tag{8}$$

Da s zwei der drei Terme in (8) teilt, teilt es alle drei, also $s \mid r^2$. Da aber r und s teilerfremd vorausgesetzt waren, folgt $|s| = 1$. Damit ist ab/c eine ganze Zahl.

Analog erhält man, dass ac/b und bc/a ganz sind.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3. Sei p eine Primzahl und oBdA $v_p(a) \leq v_p(b) \leq v_p(c)$.

Wir verwenden $v_p(\frac{r}{s}) = v_p(r) - v_p(s)$. Es gilt die Eigenschaft $v_p(x \pm y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$.

Es gilt offensichtlich $v_p(bc/a) \geq 0$, $v_p(ac/b) \geq 0$ und $v_p(ab/c + bc/a + ca/b) \geq 0$, weil es sich um eine ganze Zahl handelt. Somit gilt auch $v_p(ab/c) = v_p((ab/c + bc/a + ca/b) - bc/a - ca/b) \geq \min(0, 0, 0) = 0$.

Da das für jede Primzahl gilt, sind die drei Terme ganze Zahlen.

(Theresia Eisenkölbl) □