47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

31. März 2016

Aufgabe 1. *Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen k und n, die die Gleichung*

$$k^2 - 2016 = 3^n$$

erfüllen. (Stephan Wagner)

Lösung 1. Wir betrachten die Gleichung zunächst modulo 3: Da 2016 durch 3 teilbar ist und 3^n ebenfalls, muss auch k^2 und damit k ein Vielfaches von 3 sein. Also ist k^2 sogar durch 9 teilbar, und da dies auch für 2016 gilt, muss $n \geq 2$ gelten, damit auch 3^n durch 9 teilbar ist. Nun können wir durch 9 dividieren:

$$(k/3)^2 - 224 = 3^{n-2}.$$

Nun ist $224 \equiv 2 \mod 3$, und $(k/3)^2$ entweder 0 oder 1 modulo 3. Damit ist insbesondere 3^{n-2} nicht durch 3 teilbar, was nur für $n = 2$ möglich ist. Die einzige Lösung $n = 2$, $k = 45$ folgt unmittelbar. *(Stephan Wagner)* □

Lösung 2. Wir betrachten die Gleichung modulo 4 und erhalten $k^2 \equiv (-1)^n \pmod 4$. Daher muss n gerade sein, wir schreiben $n = 2m$. Weiters muss k ungerade sein. Die Gleichung lautet dann

$$(k - 3^m)(k + 3^m) = k^2 - 3^{2m} = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Unter Berücksichtigung von $k + 3^m > k - 3^m > 0$ und weil beide Faktoren gerade sein müssen, erhalten wir folgende Fälle:

$k+3^m$	1008	504	336	252	168	144	126	112	84	72	56	48
$k-3^m$	2	4	6	8	12	14	16	18	24	28	36	42
3^m	503	250	165	122	78	65	55	47	30	22	10	3

Dabei ist die dritte Zeile die halbe Differenz der ersten beiden. Da sich nur in der letzten Spalte für 3^m eine Dreierpotenz ergibt, erhalten wir für $m = 1$ die einzige Lösung $k = 45$, $n = 2$. *(Gerhard Kirchner)* □

Lösung 3. Wie in Lösung 2 sieht man, dass n gerade ist und erhält die Gleichung

$$(k + 3^m)(k - 3^m) = 2016.$$

Die Primfaktoren von $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ sind also zu zwei Teilprodukten $P_1 = k + 3^m$ und $P_2 = k - 3^m$ mit der Differenz $2 \cdot 3^m$ zusammenzufassen.
Sind das Produkt und die Differenz zweier natürlicher Zahlen n_1 und n_2 durch eine Primzahl p teilbar, dann sind n_1 und n_2 selbst Vielfache von p: Wegen $n_1 \cdot n_2 \equiv 0 \pmod p$ ist mindestens eine der beiden Zahlen n_1 und n_2 durch p teilbar, wegen $n_1 \equiv n_2 \pmod p$ auch die zweite.
Das Produkt $P_1 \cdot P_2$ ist wie die Differenz $P_1 - P_2$ sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar. Daher sind P_1 und P_2 selbst Vielfache von 2 und 3, und es gilt

$$P_1 = 2 \cdot 3 \cdot z_1 = 6 \cdot z_1, \quad P_2 = 2 \cdot 3 \cdot z_2 = 6 \cdot z_2 \quad \text{mit } z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^+.$$

Daraus folgt einerseits $P_1 \cdot P_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot z_1 \cdot z_2 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, also $z_1 \cdot z_2 = 2^3 \cdot 7 = 56$, und andererseits $P_1 - P_2 = 6 \cdot z_1 - 6 \cdot z_2 = 2 \cdot 3^m$, also $z_1 - z_2 = \frac{2 \cdot 3^m}{6} = 3^{m-1}$.
Die Zahl 56 hat $(3+1)(1+1) = 8$ Teiler. Das einzige Paar komplementärer Teiler in der Teilermenge $T(56) = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$ mit einer Potenz von 3 als Differenz ist wegen $8 - 7 = 3^0$ das Paar $(7; 8)$.
Damit erhalten wir $z_1 = 8$, $z_2 = 7$, $m - 1 = 0$ und daher $m = 1$, $P_1 = 48 = k + 3$, $P_2 = 42 = k - 3$. Also gibt es genau eine Lösung, nämlich $k = 45$, $n = 2$. *(Gottfried Perz)* □

Lösung 4. Wie in Lösung 2 sieht man, dass n gerade ist und erhält mit $3^m = a$ die Gleichung

$$k^2 - a^2 = 2016.$$

Damit sind a (als Potenz von 3) und k ungerade und unterscheiden sich damit mindestens um 2, es gilt also $k \geq a + 2$. Daraus ergibt sich

$$2016 = k^2 - a^2 \geq (a+2)^2 - a^2 = 4a + 4$$

und damit $3^m = a \leq (2016 - 4)/4 = 503$. Damit gilt $3^m = a \in \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$.
Daraus ergibt sich $k^2 = a^2 + 2016 \in \{2017, 2025, 2097, 2745, 8577, 61065\}$. Davon ist lediglich 2025 eine Quadratzahl und daher $(k, n) = (45, 2)$ die einzige Lösung.

(Katharina Schindegger, Clemens Heuberger) □

Aufgabe 2. *Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$.*
Man beweise, dass die Ungleichung

$$(a+2)(b+2) \geq cd$$

gilt, und man gebe vier Zahlen a, b, c und d an, für die Gleichheit gilt. (Walther Janous)

Lösung 1. Ausmultiplizieren des linksseitigen Ungleichungsterms ergibt $ab + 2a + 2b + 4 \geq cd$. Wegen der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ lautet diese Ungleichung in äquivalenter Form

$$ab + 2a + 2b + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq cd,$$

das heißt nach Multiplikation mit 2:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2ab + 4a + 4b - 2cd \geq 0$$

Weil sich der linksseitige Ausdruck als

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + 2ab + 4a + 4b + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (c-d)^2 = \\ &\qquad = a^2 + b^2 + 2ab + 4a + 4b + 4 + (c-d)^2 = (a+b+2)^2 + (c-d)^2 \end{aligned}$$

darstellen lässt, ist die Ungleichung bewiesen. Gleichheit ergibt sich genau dann, wenn

$$a + b = -2 \qquad \text{und} \qquad c = d \qquad \text{samt} \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$$

sind, also insbesondere für $a = b = -1$ und $c = d = 1$. *(Walther Janous)* □

Lösung 2. Mithilfe der allgemeinen Ungleichung

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}, \qquad \text{samt Gleichheit genau für } x = y$$

verschärfen wir die behauptete Ungleichung zu $(a+2)(b+2) \geq \dfrac{c^2 + d^2}{2}$. Dies und $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ ergeben

$$(a+2)(b+2) \geq \frac{4 - a^2 - b^2}{2}.$$

Ausmultiplizieren (und Termumstellung) ergibt

$$a^2 + b^2 + 2ab + 4a + 4b + 4 \geq 0, \qquad \text{das heißt} \qquad (a+b+2)^2 \geq 0.$$

Zum Gleichheitsfall siehe die Überlegungen in Lösung 1. *(Walther Janous)* □

Lösung 3. Mit $a = x - 2$ und $b = y - 2$ lautet die behauptete Ungleichung $xy \geq cd$. Dabei gilt für die reellen Zahlen x, y, c und d die Bedingung

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + c^2 + d^2 = 4, \qquad \text{also} \qquad x^2 + y^2 + c^2 + d^2 = 4x + 4y - 4.$$

Wegen $2cd \leq c^2 + d^2 = 4x + 4y - 4 - x^2 - y^2$ verbleibt noch der Nachweis von

$$4x + 4y - 4 - x^2 - y^2 \leq 2xy, \qquad \text{das heißt} \qquad x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 4 \geq 0.$$

Diese Ungleichung lässt sich aber als $(x + y - 2)^2 \geq 0$ darstellen. Im Gleichheitsfall gelten $x + y = 2$ und $c = d$, siehe die Überlegungen in Lösung 1. *(Walther Janous)* □

Lösung 4. Aus $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ ergeben sich unmittelbar $|a|$, $|b|$, $|c|$, $|d| \leq 2$. Wir bemerken zuerst, dass

$$cd \leq |c||d| \qquad \text{und} \qquad (2+a)(2+b) \geq (2-|a|)(2-|b|)$$

gelten. Deshalb genügt der Nachweis der Ungleichung $(2-a)(2-b) \geq cd$, wobei a, b, c und d nichtnegative reelle Zahlen mit $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$ sind. Es sei $a^2+b^2 = t$ mit $0 \leq t \leq 4$. Dann ist $c^2+d^2 = 4-t$, woraus sich mit der AGMU $cd \leq \frac{4-t}{2}$ ergibt. Wir müssen deshalb für nichtnegative a und b mit $a^2 + b^2 = t$ die Ungleichung

$$(2-a)(2-b) \geq \frac{4-t}{2} \tag{1}$$

beweisen. Der Fall $a = 2$ oder $b = 2$ kann nur für $t = 4$ auftreten. Dann ist (1) aber evident. Es sei deshalb im Folgenden $0 \leq t < 4$. Die Ungleichung (1) lautet in äquivalenter Form

$$2 - b \geq \frac{4-t}{2(2-a)}, \qquad \text{das heißt} \qquad 2 - \frac{4-t}{2(2-a)} \geq b, \qquad \text{also} \qquad \frac{4+t-4a}{2(2-a)} \geq \sqrt{t-a^2}.$$

Der linksseitige Ausdruck ist wegen $4 + t - 4a \geq 4 + a^2 - 4a = (a-2)^2$ nichtnegativ. Deshalb dürfen wir die letzte Ungleichung quadrieren und erhalten

$$(4 + t - 4a)^2 \geq 4(2-a)^2(t - a^2),$$

das heißt nach kurzer Rechnung

$$16 + t^2 + 16a^2 + 8t - 32a - 8at \geq -4a^4 + 16a^3 + 4a^2t - 16a^2 - 16at + 16t, \qquad \text{also}$$
$$4a^4 - 16a^3 + 32a^2 - 4a^2t + 8at - 32a + t^2 - 8t + 16 \geq 0.$$

Mit etwas Geduld erkennt man für diese Ungleichung $(2a^2 - 4a)^2 + 16a^2 - 4a^2t + 8at - 32a + (4-t)^2 \geq 0$. Wegen $16a^2 - 4a^2t + 8at - 32a = 2(2a^2 - 4a)(4 - t)$ erhalten wir schließlich $(2a^2 - 4a + 4 - t)^2 \geq 0$ und sind damit am Ende des Beweises. Für den Gleichheitsfall erhalten wir die Bedingungen

$$c = d, \qquad c^2 + d^2 = 4 - t, \qquad a^2 + b^2 = t \qquad \text{und} \qquad 2a^2 - 4|a| + 4 = t.$$

Diese Bedingungen gelten zum Beispiel für $a = b = c = d = -1$. *(Walther Janous)* □

Aufgabe 3. *Anlässlich der 47. Mathematik-Olympiade* 2016 *stehen die Zahlen* 47 *und* 2016 *auf der Tafel. Alice und Bob spielen folgendes Spiel: Sie sind abwechselnd am Zug, wobei Alice beginnt. Wer am Zug ist, wählt zwei auf der Tafel stehende Zahlen a und b mit $a > b$, deren Differenz $a - b$ noch nicht auf der Tafel steht, und schreibt diese Differenz zusätzlich auf die Tafel. Das Spiel endet, wenn kein Zug mehr möglich ist. Wer den letzten Zug gemacht hat, gewinnt.*
Man beweise, dass Bob jedenfalls gewinnt, egal wie die beiden spielen. (Richard Henner)

Lösung 1. Sei M die Menge aller Zahlen, die bei Spielende, wenn also kein Zug mehr möglich ist, auf der Tafel stehen. M hat, wie jede Menge natürlicher Zahlen, ein kleinstes Element. Dieses sei m. Angenommen m sei größer als 1. Da mit je zwei Zahlen auch ihre Differenz auf der Tafel steht, muss m gemeinsamer Teiler aller Zahlen von M sein. Gäbe es nämlich in M eine Zahl $k > m$, sodass m kein Teiler von k ist, so könnte man durch fortlaufende Differenzenbildung (Euklidischer Algorithmus) eine Zahl finden ($\operatorname{ggT}(k, m)$), die kleiner als m ist und in M liegt. Insbesondere muss m auch gemeinsamer Teiler von 47 und 2016 sein. Also kann m nicht größer als 1 sein, $m = 1$. Wenn wir nun annehmen, dass M nicht aus allen Zahlen $1, 2, \ldots, 2016$ besteht, dann gibt es unter den fehlenden Zahlen eine größte Zahl g, die jedenfalls kleiner als 2016 ist. Wenn 1 in M ist und $g + 1$ in M ist (weil ja g die größte fehlende Zahl ist), dann ist auch $g = (g+1) - 1$ in M, – und das ist ein Widerspruch zur Annahme. Also besteht M aus allen Zahlen $1, 2, \ldots, 2016$, das ist eine gerade Anzahl von Zahlen, und daher gewinnt Bob, weil er den 2., 4., …, 2014. Zug macht. *(Richard Henner)* □

Lösung 2. Folgender Spielverlauf ist jedenfalls möglich: 2016, 47, $2016 - 47 = 1969$. Dann wird immer wieder 47 subtrahiert: $1969 - 41 \cdot 47 = 42$, $47 - 42 = 5$. Von den Zahlen, die jetzt schon auf der Tafel stehen, ist 136 die kleinste, die in der Restklasse 1 modulo 5 liegt. Daher rechnen wir weiter mit $136 - 5 = 131$. Dann wird immer wieder 5 subtrahiert: $131 - 26 \cdot 5 = 1$. Jetzt steht 1 auf der Tafel. Nun sei M die Menge aller Zahlen, die auf der Tafel stehen, und g die größte Zahl in M mit der Eigenschaft, dass $g - 1$ nicht in M liegt, dann fügen wir $g - 1$ zu M dazu. Das wiederholen wir so lange, bis $M = \{1, 2, \ldots, 2016\}$ gilt. Diesen Spielverlauf nennen wir „Musterspiel“. Da M eine gerade Anzahl von Zahlen hat, gewinnt Bob bei diesem Spielverlauf, weil er den 2., 4., …, 2014. Zug macht.
Behauptung: Wenn es einen Spielverlauf gibt, bei dem am Ende alle Zahlen auf der Tafel stehen, dann stehen bei jedem Spielverlauf am Ende alle Zahlen auf der Tafel.
Beweis: Angenommen bei einem bestimmten Spielverlauf würde am Ende die Menge M' auf der Tafel stehen, die eine echte Teilmenge von M ist. Wir nummerieren nun im Musterspiel die Zahlen von 1 bis 2016 in der Reihenfolge, in der sie auf die Tafel geschrieben wurden: 2016 erhält die Nummer 1, 47 die Nummer 2, 1969 die Nummer 3, und so weiter. Die Zahlen, deren Differenz gebildet wurde, um eine bestimmte Zahl z zu ermitteln, nennen wir die „Eltern von z“. Die Eltern von z haben natürlich kleinere Nummern als z. Von allen Zahlen, die in M vorkommen aber nicht in M', wählen wir nun jene, die im Musterspiel die kleinste Nummer hat, und nennen sie k. Die Eltern von k haben kleinere Nummern als k und müssen daher in M' vorkommen. Damit müsste aber auch k in M' vorkommen, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Also gibt es keine Zahlen, die in M vorkommen, aber nicht in M'. Auch $M' = \{1, 2, \ldots, 2016\}$. *(Richard Henner)* □

Aufgabe 4. *Es sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$ und dem Umkreismittelpunkt U. Die Tangenten an den Umkreis in den Punkten A und B schneiden einander im Punkt T. Die Symmetrale der Seite BC schneidet die Seite AC im Punkt S.*
Man zeige:

(a) *Die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.*

(b) *Die Gerade ST ist parallel zur Seite BC.*

(Karl Czakler)

Lösung 1. Da AT und BT normal auf AU bzw. BU stehen, liegen die Punkte A, B, T und U aufgrund des Satzes von Thales auf einem Kreis k_1 über dem Durchmesser TU. Weiters gilt mit dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle AUB = 2\gamma$. Da das Dreieck BCS gleichschenkelig ist, gilt $\sphericalangle BCS = \sphericalangle CBS = \gamma$. Da der Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel ist, folgt $\sphericalangle ASB = 2\gamma$. Daher gilt

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle AUB = 2\gamma,$$

und mit dem Peripheriewinkelsatz folgt, dass die Punkte A, B, S und U auf einem Kreis k_2 liegen. Da die beiden Kreise k_1 und k_2 die Punkte A, B, U gemeinsam haben gilt $k_1 = k_2$ und die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.
Mit dem Südpolsatz folgt, dass ST die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle ASB$ ist. Daher gilt $\sphericalangle AST = \gamma$ und somit ist ST parallel zu BC. *(Karl Czakler)* □

Lösung 2. Da AT und BT normal auf AU bzw. BU stehen, liegen die Punkte A, B, T und U aufgrund des Satzes von Thales auf einem Kreis k_1 über dem Durchmesser TU. Weiters gilt mit dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle AUB = 2\gamma$ und daher $\sphericalangle ATB = 180° - 2\gamma$.
Da das Dreieck BCS gleichschenkelig ist, gilt $\sphericalangle BCS = \sphericalangle CBS = \gamma$.
Daher gilt $\sphericalangle ABS = \beta - \gamma > 0$ $(AC > AB)$ und über die Winkelsumme im Dreieck ABS folgt $\sphericalangle ASB = 2\gamma$.
Da sich im Viereck $ATBS$ gegenüberleigende Winkel auf 180° ergänzen, ist es ein Sehnenviereck und hat daher einen Umkreis k_2.
Da die beiden Kreise k_1 und k_2 die Punkte A, B, T gemeinsam haben, gilt $k_1 = k_2$ und die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.
Die beiden Dreiecke AUT und BUT sind kongruent, daher gilt $\sphericalangle AUT = \gamma = \sphericalangle BUT$. Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt nun $\sphericalangle AST = \sphericalangle AUT = \gamma$ und somit ist ST parallel zu BC.

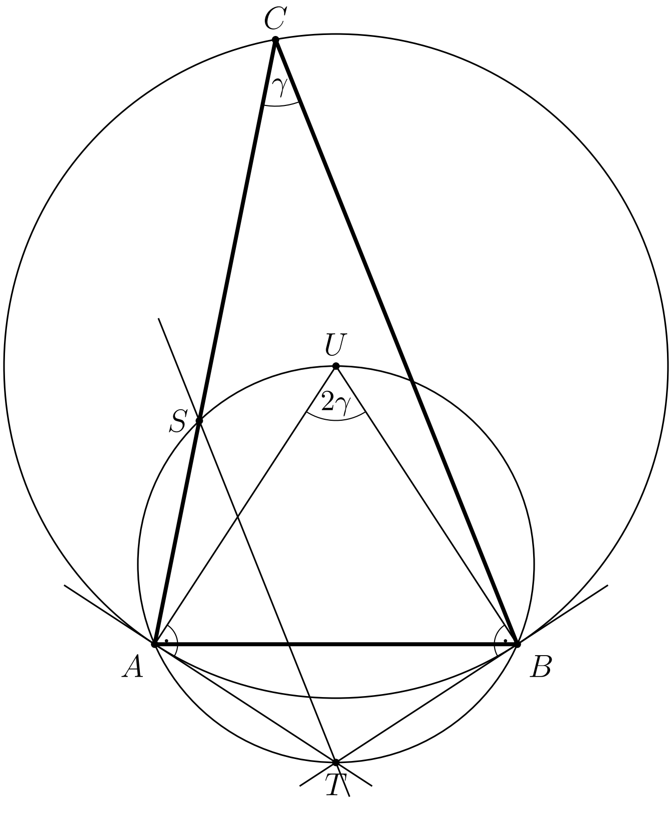

Abbildung 1: Aufgabe 4

(Karl Czakler) □