

57. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb – Lösungen

16. Juni 2026

Aufgabe 1. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a + b \neq c$, $b + c \neq a$ und $c + a \neq b$.

Man beweise, dass mindestens eine der drei Zahlen

$$\frac{c}{a+b-c}, \quad \frac{a}{b+c-a}, \quad \frac{b}{c+a-b}$$

kleiner oder gleich 1 ist.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen, alle drei Zahlen sind größer als 1, also

$$\frac{c}{a+b-c} > 1, \quad \frac{a}{b+c-a} > 1, \quad \frac{b}{c+a-b} > 1.$$

Insbesondere sind damit die Nenner der drei Brüche positiv. Wir können also ausmultiplizieren und erhalten

$$c > a + b - c, \quad a > b + c - a, \quad b > c + a - b.$$

Durch Addition dieser drei Ungleichungen ergibt sich

$$a + b + c > a + b + c.$$

Das ist ein Widerspruch, also muss unsere Annahme falsch und mindestens eine der drei Zahlen kleiner oder gleich 1 gewesen sein.

(Karl Czakler) $\square$

Lösung 2. Weil man durch zyklische Vertauschung der Variablen a, b, c wieder dieselben drei Ausdrücke erhält, können wir o. B. d. A. annehmen, dass $a \leq b$ und $a \leq c$ gilt. Dann gilt $a - b \leq 0$ und folglich

$$b + c - a = c - (a - b) \geq c.$$

Zusammen mit $a \leq c$ ergibt das

$$\frac{a}{b+c-a} \leq \frac{a}{c} \leq 1.$$

(Gottfried Perz) $\square$

Lösung 3. Es genügt zu zeigen: Falls die ersten beiden Brüche größer als 1 sind, dann ist der dritte Bruch kleiner oder gleich 1.

Angenommen, die beiden ersten Brüche sind größer als 1. Dann sind die beiden Nenner offensichtlich positiv und es folgt

$$c > a + b - c \quad \text{und} \quad a > b + c - a.$$

Addition dieser Ungleichungen liefert $c + a > 2b$, bzw.

$$c + a - b > b > 0$$

Daher ist

$$\frac{b}{c+a-b} < 1$$

und alles ist gezeigt.

(Reinhard Razen) $\square$

Aufgabe 2. Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, $AB > CD$ und $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CBA = 90^\circ$. Weiters seien M und N die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. CD .

Man beweise:

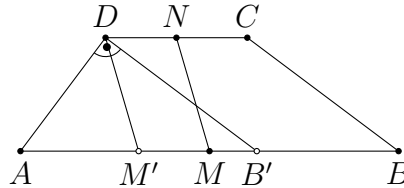
$$2 \cdot MN = AB - CD.$$

(Karl Czakler)

Lösung 1. Sei B' der Punkt auf AB , sodass $B'D$ parallel zu BC ist. Dann gilt

$$\sphericalangle ADB' = 180^\circ - (\sphericalangle B'AD + \sphericalangle DB'A) = 90^\circ$$

und $AB' = AB - CD$. Sei M' der Punkt auf AB , sodass $M'D$ parallel zu MN ist.



Dann gilt:

$$2 \cdot AM' = 2 \cdot (AM - MM') = AB - CD.$$

Daraus und mit $AB' = AB - CD$ folgt, dass M' der Mittelpunkt von AB' ist. Mit dem Satz von Thales folgt dann

$$2 \cdot MN = 2 \cdot M'D = 2 \cdot B'M' = 2 \cdot AM' = AB - CD.$$

(Karl Czakler) $\square$

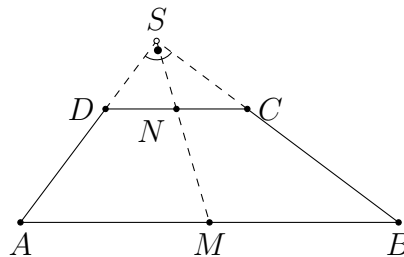
Lösung 2. Es sei S der Schnittpunkt der Geraden AD und BC .

Mit dem Strahlensatz gilt, dass die Punkte M , N und S auf einer Geraden liegen.

Weiters gilt

$$\sphericalangle ASB = 180^\circ - (\sphericalangle BAD + \sphericalangle CBA) = 90^\circ.$$

Also sind die beiden Dreiecke ABS und DCS rechtwinkelig.



Nach dem Satz von Thales gilt nun

$$2 \cdot MN = 2 \cdot (MS - NS) = AB - CD.$$

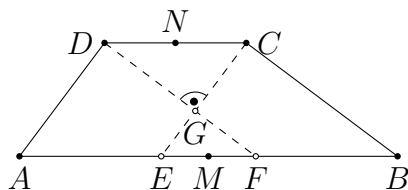
(Gerhard Kirchner) $\square$

Lösung 3. Es seien E der Schnittpunkt von AB mit der Parallelen zu AD durch C und F der Schnittpunkt von AB mit der Parallelen zu BC durch D . Wegen $AE = BF = DC$ ist M auch der Mittelpunkt der Strecke EF . Sei G der Schnittpunkt von EC mit FD .

Es gilt

$$\sphericalangle EGF = 180^\circ - (\sphericalangle GEF + \sphericalangle GFE) = 180^\circ - (\sphericalangle BAD + \sphericalangle CBA) = 90^\circ.$$

Daher sind FGE und DGC rechtwinklige Dreiecke.



Mit dem Strahlensatz folgt, dass die Punkte M , G und N auf einer Geraden liegen. Wie betrachten nun den Fall, dass G zwischen M und N liegt. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales gilt $2 \cdot MG = EF$ und $2 \cdot GN = CD$. Somit folgt

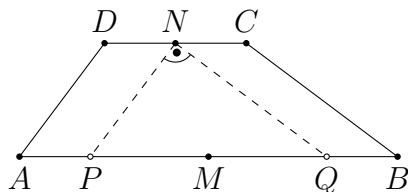
$$2 \cdot MN = 2 \cdot (MG + GN) = EF + CD = AB - 2CD + CD = AB - CD.$$

Die beiden anderen Fälle $G = M$ und G liegt auf der Verlängerung von NM über M hinaus behandelt man analog.

(Karl Czakler, Reinhard Razen) $\square$

Lösung 4. Zeichne jeweils eine Parallele zu AD und CB durch N . Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit AB seien P und Q . Aus $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 90^\circ$ ergibt sich

$$\sphericalangle PNQ = 180^\circ - (\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC) = 90^\circ.$$



Das heißt, diese beiden Parallelen stehen aufeinander normal. Also liegt N auf dem Thaleskreis über PQ . Da

$$AP = DN = \frac{1}{2}CD = NC = BQ$$

gilt, muss M der Mittelpunkt dieses Thaleskreises sein. Damit ergibt sich wegen

$$2 \cdot MN = PQ = AB - 2 \cdot AP = AB - CD$$

die Behauptung.

(Ralf Roupec) $\square$

Aufgabe 3. Jeder Spielstein eines Dominospiels besteht aus zwei Hälften. Auf jeder Hälfte steht eine der Zahlen $0, 1, \dots, 6$. Es kommen alle Spielsteine $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ mit $0 \leq a \leq b \leq 6$ genau einmal vor. Wir betrachten $\begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix}$ als denselben Stein wie $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$.

Eine Reihe entsteht, wenn man mindestens zwei Steine so hintereinander legt, dass die Zahlen auf benachbarten Hälften hintereinander liegender Steine stets übereinstimmen.

Eine Reihe heißt geschlossen, wenn auch an den beiden Enden der Reihe die gleiche Zahl steht.

Zum Beispiel ist $\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$ eine geschlossene Reihe.

Man bestimme die größte Anzahl von geschlossenen Reihen, die man mit dem Dominospiel zugleich bilden kann. (Dabei dürfen auch Steine übrig bleiben.)

(Karl Czakler)

Lösung. Wir beginnen mit einigen einfachen Beobachtungen:

- Eine Reihe aus zwei Steinen kann niemals geschlossen sein, da sie aus zwei identischen Steinen $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix}$ bestehen müsste. Jede geschlossene Reihe muss also mindestens 3 Steine enthalten.

- Enthält eine geschlossene Reihe einen (oder mehrere) Doppelstein $\boxed{a|a}$, so kann man diese(n) entfernen, sie bleibt geschlossen.
- Durch Entfernen aller Doppelsteine wird also die Anzahl geschlossener Reihen nicht verändert. Man kann also auch annehmen, dass diese Steine übrig bleiben.
- Es gibt insgesamt $\binom{7}{2} = 21$ Steine, die keine Doppelsteine sind.

Da für jede geschlossene Reihe mindestens 3 Steine benötigt werden, kann man aus den 21 Steinen höchstens 7 geschlossene Reihen bilden. Das folgende Beispiel zeigt, dass es tatsächlich möglich ist, 7 geschlossene Reihen zu je 3 Steinen zu bilden:

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{0|1}, & \boxed{1|2}, & \boxed{2|0} \\
\boxed{0|3}, & \boxed{3|4}, & \boxed{4|0} \\
\boxed{0|5}, & \boxed{5|6}, & \boxed{6|0} \\
\boxed{1|3}, & \boxed{3|5}, & \boxed{5|1} \\
\boxed{1|4}, & \boxed{4|6}, & \boxed{6|1} \\
\boxed{2|3}, & \boxed{3|6}, & \boxed{6|2} \\
\boxed{2|4}, & \boxed{4|5}, & \boxed{5|2}
\end{array}$$

(Gerhard Kirchner) $\square$

Aufgabe 4. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen k , für die

$$2^k + 3^k + 4^k$$

eine Quadratzahl ist.

(Walther Janous)

Antwort. Die einzige positive ganze Zahl k mit dieser Eigenschaft ist $k = 1$.

Lösung. Wir bezeichnen die in Rede stehenden Zahlen mit z_k .

- Für $k = 1$ erhalten wir $z_1 = 2 + 3 + 4 = 3^2$, also eine Quadratzahl.
- Es sei $k \geq 2$. Dann ist 2^k durch 4 teilbar und wir haben

$$z_k \equiv 0 + (-1)^k + 0 \equiv 3^k \pmod{4}.$$

Weil 3 kein quadratischer Rest modulo 4 ist, kann z_k nur dann eine Quadratzahl sein, wenn k gerade ist. Damit ist aber

$$z_k \equiv (-1)^k + 0 + 1^k \equiv 2 \pmod{3}.$$

Weil aber 2 kein quadratischer Rest modulo 3 ist, ist z_k keine Quadratzahl.

Somit ist $k = 1$ die einzige positive ganze Zahl, für die $2^k + 3^k + 4^k$ eine Quadratzahl ist.

(Walther Janous) $\square$