47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

31. März 2016

1. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen k und n, die die Gleichung

$$k^2 - 2016 = 3^n$$

erfüllen.

(Stephan Wagner)

2. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$.
Man beweise, dass die Ungleichung

$$(a + 2)(b + 2) \geq cd$$

gilt, und man gebe vier Zahlen a, b, c und d an, für die Gleichheit gilt.

(Walther Janous)

3. Anlässlich der 47. Mathematik-Olympiade 2016 stehen die Zahlen 47 und 2016 auf der Tafel. Alice und Bob spielen folgendes Spiel: Sie sind abwechselnd am Zug, wobei Alice beginnt. Wer am Zug ist, wählt zwei auf der Tafel stehende Zahlen a und b mit $a > b$, deren Differenz $a - b$ noch nicht auf der Tafel steht, und schreibt diese Differenz zusätzlich auf die Tafel. Das Spiel endet, wenn kein Zug mehr möglich ist. Wer den letzten Zug gemacht hat, gewinnt.
Man beweise, dass Bob jedenfalls gewinnt, egal wie die beiden spielen.

(Richard Henner)

4. Es sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$ und dem Umkreismittelpunkt U. Die Tangenten an den Umkreis in den Punkten A und B schneiden einander im Punkt T. Die Symmetrale der Seite BC schneidet die Seite AC im Punkt S.
Man zeige:

   (a) Die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.

   (b) Die Gerade ST ist parallel zur Seite BC.

(Karl Czakler)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.