57. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale – Lösungen

27./28. Mai 2026

Aufgabe 1. *Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Umkreis k. Sei S der Schnittpunkt der Tangenten in A und B an den Umkreis k, sei M der Mittelpunkt von AB und sei H' der an AB gespiegelte Punkt H. Sei P der Schnittpunkt der Geraden MH mit dem Umkreis k mit der Eigenschaft, dass H zwischen M und P liegt.*

Man beweise, dass die Punkte S, H' und P auf einer Geraden liegen.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Sei S' der Schnittpunkt von $H'P$ mit der Streckensymmetrale von AB. Es genügt $S' = S$ zu zeigen.

Sei O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks und Q der zweite Schnittpunkt von MH mit k.

Mit der Potenz des Punktes H bezüglich des Kreises k folgt

$$HQ \cdot HP = HC \cdot HH',$$

und mit den bekannten Beziehungen $HC = 2OM$ und $HQ = 2MQ$ erhält man

$$HP = \frac{2OM \cdot HH'}{2MQ} = \frac{OM \cdot HH'}{MQ}.$$

Die Dreiecke $MS'P$ und $HH'P$ sind ähnlich. Daher gilt

$$MS' : HH' = MP : HP.$$

Setzen wir nun obiges Resultat ein, so erhalten wir

$$MS' : HH' = MP : \frac{OM \cdot HH'}{MQ}$$

und daraus folgt

$$MS' = \frac{MQ \cdot MP}{OM}.$$

Mit der Potenz des Punktes M bezüglich k folgt dann

$$MS' = \frac{AM^2}{OM}.$$

Sei nun S der Schnittpunkt der beiden Tangenten. Die Punkte A, S, B und O liegen auf einem Kreis. Daher gilt wieder mit der Potenz des Punktes M bezüglich dieses Kreises

$$MS \cdot OM = AM^2,$$

also

$$MS = \frac{AM^2}{OM}.$$

Damit ist aber $S = S'$ gezeigt und P, H' und S sind kollinear.

(Karl Czakler) □

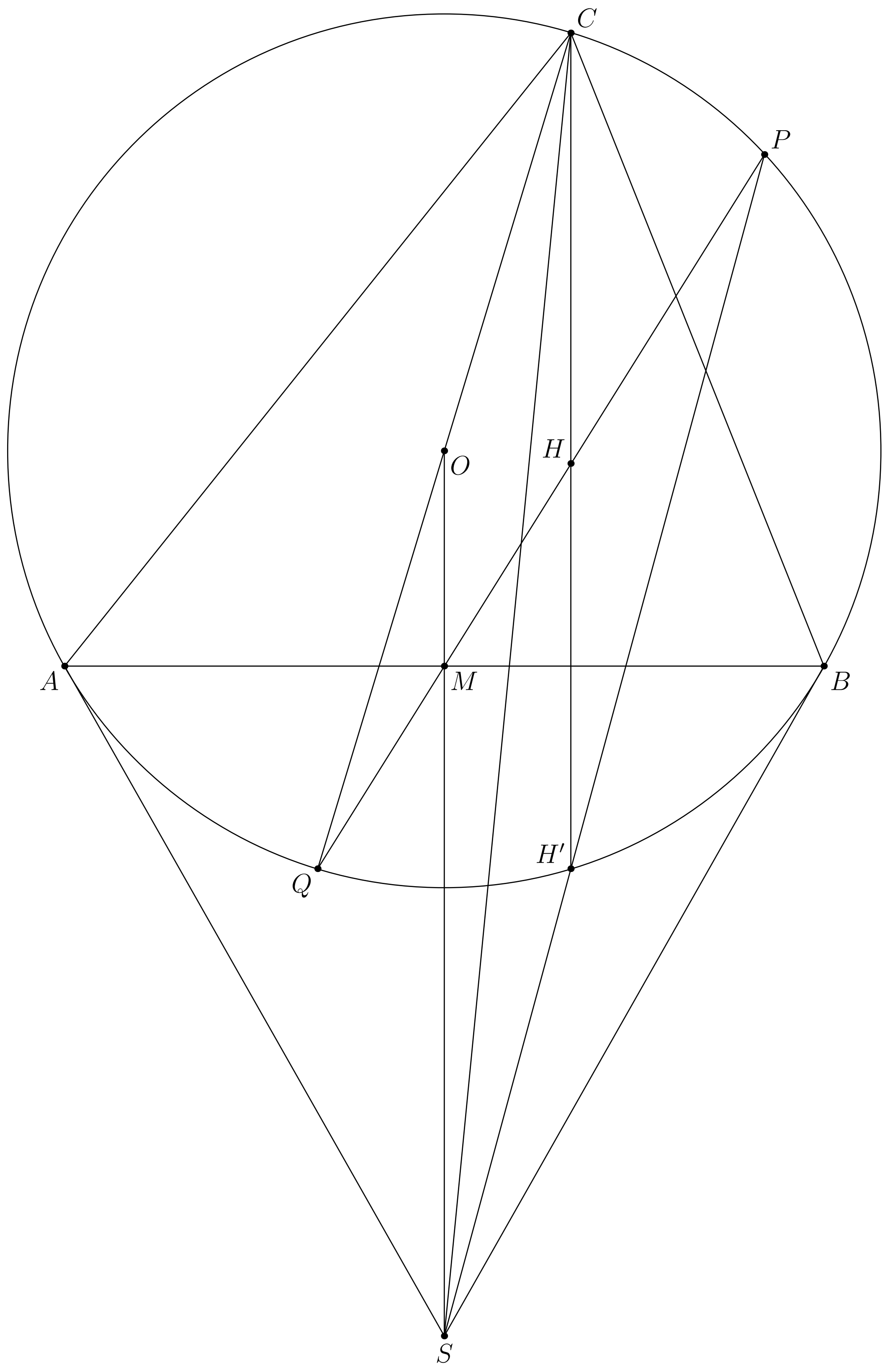

Abbildung 1: Aufgabe 1, Lösung 1

Lösung 2. Bekanntermaßen liegt H' auf k. Spiegelt man H' nun an der Streckensymmetrale von AB, so erhält man insgesamt das Spiegelbild von H am Punkt M, welches wir mit H'' bezeichnen. Dieser Punkt liegt auch auf k, weil die Streckensymmetrale auch eine Symmetrieachse von k ist. Zudem ist H'' der von P verschiedene zweite Schnittpunkt der Geraden MH mit k.

Weil $H''H'$ parallel zu AB ist, und M der Mittelpunkt von AB, teilen die Geraden $H''H'$ und $H''M$ das Geradenpaar $H''A$ und $H''B$ harmonisch. Trägt man das entsprechende Doppelverhältnis auf den Kreis k ab, so ergibt sich dass A, B, H' und P harmonische Punktepaare auf k sind. Damit schneiden die Tangenten in A und B die Gerade durch $H'P$, was zu zeigen war.

(Josef Greilhuber) □

Lösung 3. Wir betrachten drei Kreise, nämlich die Umkreise von ABC, AMO und OMP. Nun stellen wir einige Eigenschaften dieser Kreise fest.

Zuerst bemerken wir, dass die Tangente an den Umkreis von AMO in A gleichzeitig die Tangente an den Umkreis von ABC in A ist, da die Streckung mit Zentrum A und Faktor $\frac{1}{2}$ den Umkreis von ABC auf den Umkreis von AMO abbildet.

Weiters bemerken wir, dass der Punkt H' auf dem Umkreis von OMP liegt. Dies erkennen wir mit Hilfe des Punktes Q, der sowohl symmetrisch zu H' bezüglich OM als auch symmetrisch zu C bezüglich O liegt. Im gleichschenkligen Dreieck OQP gilt $\angle OPQ = \angle PQO$, und aufgrund der Symmetrie bezüglich OM gilt $\angle MQO = \angle OH'M$. Es folgt daher

$$\angle OH'M = \angle MQO = \angle PQO = \angle OPQ = \angle OPM,$$

womit $OMH'P$ als Sehnenviereck erkannt ist.

Nun betrachten wir die Potenzgeraden dieser drei Kreise.

Die Potenzgerade der Umkreise von AMO und ABC ist ihre gemeinsame Tangente in A. Die Potenzgerade der Umkreise von ABC und $OMH'P$ ist die Gerade PH'. Schließlich ist die Potenzgerade der Umkreise von $OMH'P$ und AMO die Gerade OM. Diese drei Geraden haben also das Potenzzentrum S dieser drei Kreise gemeinsam, der aus Symmetriegründen auch auf der Tangente des Umkreises von ABC in B liegt.

(Georg Weisbier) □

Aufgabe 2. *Alice und Bob spielen ein Spiel. Zu Beginn liegt auf dem Tisch ein Haufen von n Steinen, wobei n eine positive ganze Zahl ist. In jedem Spielzug wird entweder ein Stein eines beliebigen Haufens vom Tisch entfernt, oder ein vorhandener Haufen in zwei neue nichtleere Haufen aufgeteilt. Die beiden spielen abwechselnd, wobei Alice beginnt. Wenn eine Person keinen gültigen Spielzug mehr hat, hat die andere Person gewonnen.*

Man bestimme für jedes n, wer von beiden eine Gewinnstrategie hat.

(Theresia Eisenkölbl)

Antwort. Alice gewinnt für $n = 1$ sowie für n gerade. Bob gewinnt für ungerade $n \neq 1$.

Lösung 1. Für $n = 1$ kann Alice den Stein entfernen und hat damit gewonnen.

Für gerades n kann Alice den Haufen in zwei Haufen mit $n/2$ Steinen teilen. Danach kann sie jeden Zug von Bob auf einer Hälfte der Steine in der anderen Hälfte nachmachen und hinterlässt ihm wieder eine Spielstellung, in der jeder Haufen doppelt vorkommt. Da höchstens $n-1$ Mal Haufen geteilt werden können, muss die Anzahl der Steine sinken und das Spiel endet immer. Alice gewinnt, da sie sicher immer einen Zug machen kann.

Für ungerades $n \geq 3$ beweisen wir mit Induktion, dass Bob gewinnt.

Für $n = 3$ hat Alice zwei Möglichkeiten. Sie kann entweder einen Stein entfernen oder Bob zwei Haufen der Größe 1 und 2 überlassen. In ersten Fall teilt Bob den Haufen auf zwei Haufen mit einem Stein auf, im zweiten Fall entfernt er einen Stein vom Haufen mit 2 Steinen. Danach entfernen beide einen Stein und Bob hat gewonnen.

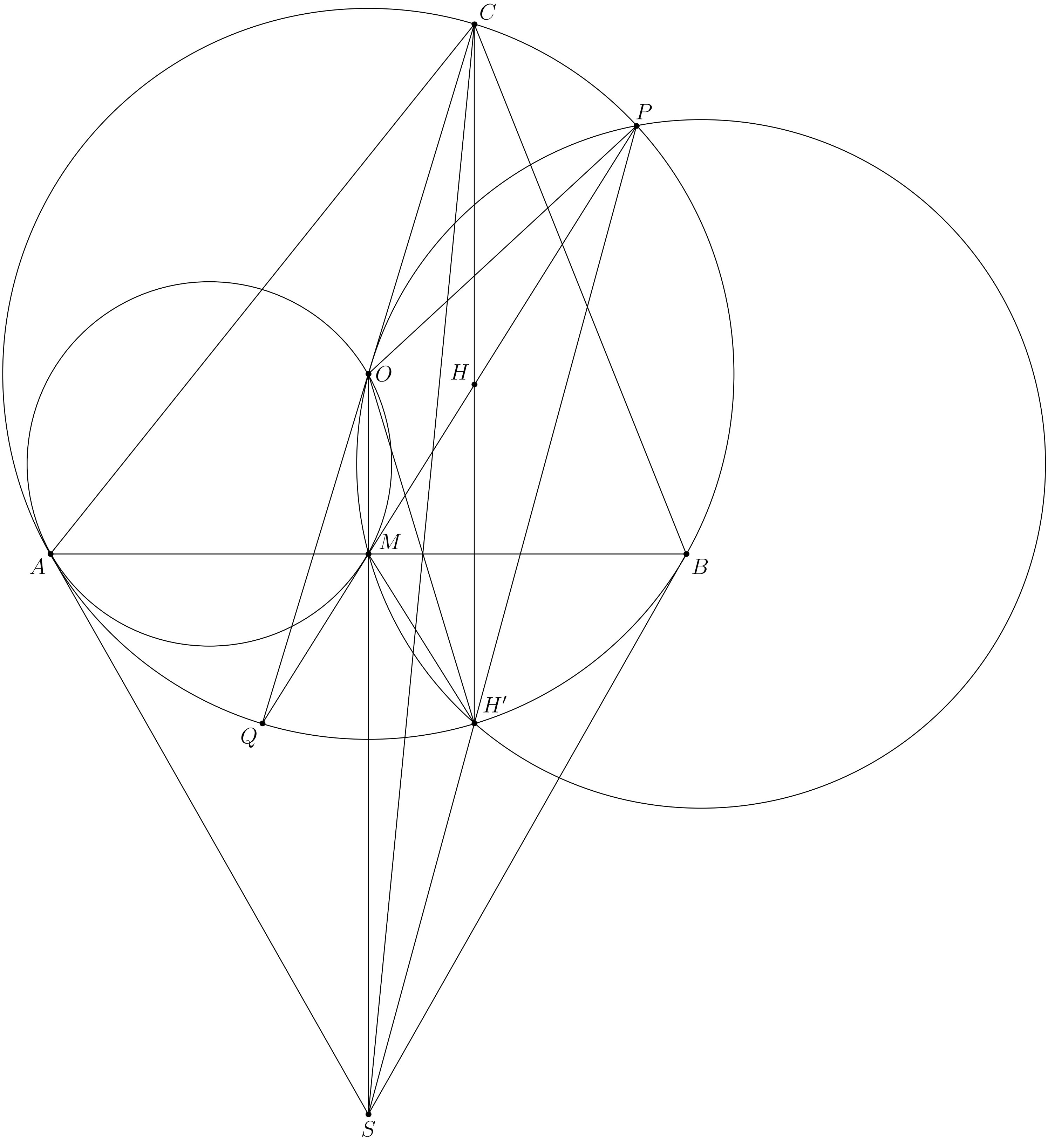

Abbildung 2: Aufgabe 1, Lösung 3

Sei nun $n > 3$ ungerade. Wir nehmen an, dass Bob für ungerade $1 < k < n$ bereits eine Gewinnstrategie hat.

Wenn Alice einen Stein entfernt, dann führt Bob die oben beschriebene Gewinnstrategie von Alice für gerade viele Steine aus und gewinnt.

Wenn Alice den Haufen so teilt, dass einer der Haufen die Größe 1 hat, dann teilt Bob den Haufen der Größe $n-1$ in einen weiteren Haufen der Größe 1 sowie einen Haufen der Größe $n-2$. Wenn nun im weiteren Spielverlauf Alice einen der beiden Haufen der Größe 1 entfernt, so entfernt Bob den anderen. Wenn Alice hingegen einen Zug mit den Steinen macht, die aus dem Haufen der Größe $n-2$ kommen, so folgt Bob dort seiner Gewinnstrategie für $n-2$, die nach Induktionsvoraussetzung existiert.

Wenn Alice den Haufen so teilt, dass keiner danach Größe 1 hat, so hat Bob nun einen Haufen gerader Größe sowie einen Haufen ungerader Größe k mit $3 \leq k < n$. Bob teilt nun den geraden Haufen in zwei gleichgroße Haufen. Wenn nun Alice im weiteren Spielverlauf einen Zug mit den Steinen macht, die aus dem Haufen der Größe k kommen, so antwortet Bob dort mit seiner Gewinnstrategie für k, die nach Induktionsvoraussetzung existiert. Wenn Alice hingegen im weiteren Spielverlauf einen Zug mit den Steinen macht, die aus einem der beiden gleichgroßen Haufen kommen, so antwortet Bob symmetrisch in den Steinen, die aus dem anderen der beiden gleichgroßen kommen. Da Bob immer einen Zug machen kann, muss Alice verlieren.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Wir stellen die Steine als Kreise und die Zusammengehörigkeit zum selben Haufen als Verbindungslinien dazwischen dar, siehe Abbildungen 3 (zu Beginn des Spiels) und 4 (nach einigen Zügen). Dabei gehören Steine zum selben Haufen, wenn sie über eine oder mehrere Verbindungslinien erreicht werden können.

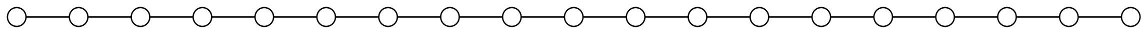

Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 2, Zu Beginn des Spiels

Abbildung 4: Aufgabe 2, Lösung 2, Nach einigen Zügen

Es gibt nun drei Zugmöglichkeiten, wie in Abbildungen 5 zu sehen:

(A) Man kann einen Haufen teilen, indem man eine Verbindungslinie entfernt.

(B) Man kann einen Stein von einem Haufen entfernen, der noch mehr als einen Stein enthält. Dabei wird ein Stein und die zu ihm führende Verbindungslinie entfernt.

(C) Man kann einen alleine liegenden Stein entfernen.

Abbildung 5: Aufgabe 2, Lösung 2, Zugmöglichkeiten

Da die Steine nicht unterscheidbar sind, verändert die Einschränkung, dass man nur „am Rand" eines Haufens liegende Steine entfernen kann, nicht das Spiel.

Einen Haufen, der genau einen Stein enthält, nennen wir einen *Einserhaufen*.

Bei $n = 1$ gewinnt der erste Spieler trivialerweise nach dem ersten Zug. Sei daher ab jetzt $n \geq 2$.

Lemma. Wenn die Anzahl der Verbindungslinien zu Beginn gerade ist – also die Anzahl der Steine ungerade –, dann gewinnt Bob.

Beweis. Bobs Strategie besteht darin, dass er nach jedem Zug sicherstellt, dass wieder eine gerade Anzahl von Verbindungslinien sowie eine gerade Anzahl von Einserhaufen vorliegt. Zu Beginn gibt es keine Einserhaufen (außer im bereits ausgeschlossenen Fall $n = 1$), was eine gerade Anzahl ist und somit ebenfalls die Bedingung erfüllt.

Falls Alice einen Einserhaufen wegnimmt, tut Bob es ihr gleich. Da die Anzahl der Einserhaufen vor Alices Zug gerade war, ist ein solcher Zug sicher möglich, und die Anzahl der Einserhaufen ist danach wieder gerade. Ebenso hat die Anzahl der Verbindungslinien sich nicht verändert, und ist damit gerade geblieben.

Falls Alice einen Zug (A) oder (B) macht, also eine Verbindungslinie entfernt, wird Bob ebenfalls einen Zug (A) oder (B) machen, sodass die Anzahl der Verbindungslinien wieder gerade ist. Er wählt dazu zunächst eine Verbidungslinie, die „am Rand" eines Haufens liegt, also an mindestens einer Seite einen Stein hat, von dem keine zweite Verbindungslinie ausgeht. Eine solche muss existieren, da die Anzahl der Verbindungslinien nach Alices Zug ungerade ist und somit sicher noch mindestens eine existiert, und da nicht alle Verbindungslinien im Inneren von Haufen liegen können.

Diese Verbindungslinie entfernt er jedenfalls. Danach zählt er die Anzahl der verbliebenen Einserhaufen. Ist diese ungerade, so entfernt er auch den nun alleine liegenden Stein neben der entfernten Verbindungslinie (er macht also einen Zug (B)), andernfalls lässt er ihn liegen (und macht einen Zug (A)). Auf diese Art kann er auch die Parität der Anzahl der Einserhaufen ausgleichen.

Bemerkung. Die Anzahl der Einserhaufen nach dem Entfernen der von Bob gewählten Verbindung hängt sowohl davon ab, ob Alice bei ihrem Zug keinen, einen oder zwei Einserhaufen erzeugt hat, als auch davon, ob Bob eine Verbindung aus einem Haufen mit genau zwei oder mit mehr Steinen entfernt hat.)

Da Bob immer einen gültigen Zug als Antwort hat, verliert Alice. ■

Lemma. Wenn die Anzahl der Verbindungslinien zu Beginn ungerade ist – also die Anzahl der Steine gerade –, dann gewinnt Alice.

Beweis. Alice stellt sich vor, dass zu Beginn $n + 1$ Steine am Haufen gewesen wären und Bob gerade einen Stein entfernt hätte, also einen Zug (B) gemacht hätte. Nun spielt sie die Strategie von Bob wie im vorigen Lemma.

Bemerkung. Man kann auch argumentieren, dass sie einen Stein entfernt und danach zweite Spielerin in einer Situation wie im vorigen Lemma ist. Dabei muss man den Fall $n = 2$ aber gesondert behandeln, da das vorige Lemma für $n = 1$ nicht gilt.

■

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 3. Wir verwenden hier die Theorie der Grundyzahlen (Nimbers), da ein Spiel vorliegt, in dem die möglichen Spielzüge und die Gewinnbedingung nur von der Spielposition und nicht von der Person abhängen.

Seien a und b zwei natürliche Zahlen. Ihre XOR-Summe $a \oplus b$ hat genau dann eine Ziffer 0 an der k-ten Stelle der Binärdarstellung, wenn die k-ten Stellen der Binärdarstellungen von a und b gleich sind.

Sei nun A eine endliche Menge natürlicher Zahlen. Dann definieren wir $mex(A)$ als die kleinste natürliche Zahl, die nicht in A vorkommt (mex steht für minimal excluded).

Die Grundyzahlen der Spielpositionen sind nun folgendermaßen rekursiv zu berechnen:

$$G(P) = mex(\{G(P') : P' \text{ ist eine Position, die von } P \text{ durch einen Spielzug erreicht werden kann.}\})$$

Wir schreiben nun eine Spielposition mit Haufen $a_1, a_2, \ldots$ als $a_1|a_2|\ldots$. Es gilt laut Definition $G(0) = 0$.

Eine weitere Eigenschaft der Grundyzahlen, die wir noch benötigen ist

$$G(a|b) = G(a) \oplus G(b).$$

Wir berechnen jetzt

$$\begin{aligned}
&G(0) = 0\\
&G(1) = mex(\{G(0)\}) = mex(\{0\}) = 1\\
&G(2) = mex(\{G(1), G(1|1)\}) = mex(\{1, 1 \oplus 1\}) = mex(\{1, 0\}) = 2\\
&G(3) = mex(\{G(2), G(1|2)\}) = mex(\{2, 1 \oplus 2\}) = mex(\{2, 3\}) = 0\\
&G(4) = mex(\{G(3), G(1|3), G(2|2)\}) = mex(\{0, 1 \oplus 0, 2 \oplus 2\}) = mex(\{0, 1, 0\}) = 2\\
&G(5) = mex(\{G(4), G(1|4), G(2|3)\}) = mex(\{2, 1 \oplus 2, 2 \oplus 0\}) = mex(\{2, 3, 2\}) = 0
\end{aligned}$$

Wir zeigen also jetzt mit Induktion, dass $G(2k) = 2$ und $G(2k+1) = 0$ für $k \geq 1$, wobei der Induktionsanfang schon erledigt ist. Für den Induktionsschritt berechen wir

$$\begin{aligned}
G(2k) &= mex(\{G(2k-1), G(1|2k-1), G(2|2k-2), G(3|2k-3), \ldots, G(2k-1|1)\})\\
&= mex(\{0, 1 \oplus 0, 2 \oplus 2, 0 \oplus 0, 2 \oplus 2, \ldots, 0 \oplus 0, 2 \oplus 2, 0 \oplus 1\})\\
&= mex(\{0, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1\})\\
&= 2.
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
G(2k+1) &= mex(\{G(2k), G(1|2k), G(2|2k-1), G(3|2k-2), \ldots, G(2k|1)\})\\
&= mex(\{2, 1 \oplus 2, 2 \oplus 0, 0 \oplus 2, 2 \oplus 0, \ldots, 0 \oplus 2, 2 \oplus 1\})\\
&= mex(\{2, 3, 2, 2, 2, \ldots, 2, 3\})\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die Gewinnpositionen für Alice sind die Positionen P mit $G(P) \neq 0$, das sind genau 1 und die geraden Zahlen wie behauptet.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 4. Klarerweise gewinnt Alice bei $n = 1$. Es ist außerdem leicht nachzuweisen, dass Alice bei $n = 2$ gewinnt, aber bei $n = 3$ verliert. Mit dies als Basis beweisen wir per Induktion für $k \geq 1$, dass $2k$ eine Gewinnposition und $2k + 1$ eine Verlustposition ist. Nehmen wir an, dass die Behauptung für alle $1 \leq i < k$ bereits gezeigt wurde.

$2k$ ist eine Gewinnposition, da Alice einen Stein entfernen kann und $2(k-1)+1$ per Induktionsvoraussetzung eine Verlustposition ist.

In der Situation $2k + 1$ hat Alice drei Möglichkeiten:

(A) Sie entfernt einen Stein:

$2k$ ist eine Gewinnposition, somit gewinnt Bob.

(B) Sie teilt den Haufen in $2k$ und 1:

Bob spaltet ebenfalls einen Stein vom größten Haufen ab, sodass insgesamt drei Haufen der Größen $2k-1$, 1 und 1 entstehen. Bob betrachtet nun den geraden Haufen und die beiden ungeraden Haufen als zwei separate Spiele. Per Induktionsvoraussetzung ist $2k - 1$ eine Verlustposition. Klarerweise gilt dies auch für das Spiel mit zwei Haufen aus je einem Stein. Egal in welchem Spiel Alice spielt, so muss sie auf eine Gewinnposition ziehen. Dies erlaubt Bob immer in diesem Spiel weiterzuspielen und wieder auf eine Verlustposition zu ziehen. Da das Spiel nach endlich vielen Zügen endet, folgt, dass Alice verliert.

(C) Sie teilt den Haufen, wobei beide neuen Haufen mehr als einen Stein enthalten:

Ein Haufen enthält gerade viele Steine, der andere ungerade viele Steine. Als zwei separate Spiele betrachtet, ist nach Induktionsvoraussetzung einer der beiden eine Gewinnposition, der andere eine Verlustposition. Bob spielt von der Gewinnposition auf eine Verlustposition und gewinnt analog zum vorherigen Fall.

(Gabriel Pflügl) □

Aufgabe 3. *Man bestimme alle Werte a und b, für die eine Folge $(u_n)_{n\geq 1}$ positiver ganzer Zahlen existiert mit $u_1 = a$, $u_2 = b$ sowie*

$$u_{2n} = \mathrm{GM}(u_{2n+1}, u_{2n-1}) \quad \textit{und} \quad u_{2n+1} = \mathrm{AM}(u_{2n}, u_{2n+2}) \quad \textit{für } n \geq 1.$$

Dabei bezeichne $\mathrm{AM}(x, y)$ das arithmetische und $\mathrm{GM}(x, y)$ das geometrische Mittel der beiden Zahlen x und y.

(Theresia Eisenkölbl)

Antwort. Für positive ganze Zahlen a und b mit $a \leq b$ und $a \mid b^2$.

Lösung 1. Die Zahlen a und b müssen natürlich selbst positive ganze Zahlen sein. Weiters gilt für $a > b$, dass die Folge positiver ganzer Zahlen streng monoton fallend ist, was nicht möglich ist. Somit muss $a \leq b$ gelten. Wegen $u_3 = \frac{b^2}{a}$, muss $a \mid b^2$ gelten.

Wir müssen nun nur mehr zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen die Folge lauter positive ganze Zahlen enthält. Dazu reicht es zu überprüfen, dass u_3 und u_4 positive ganze Zahlen sind und wieder dieselben Bedingungen wie a und b erfüllen, d.h. es ist zu zeigen, dass u_3 und u_4 positive ganze Zahlen sind, und dass $u_3 \mid u_4^2$, da ja $u_3 \leq u_4$ schon automatisch durch die Monotonie der Folge stimmt. Dann erhält man induktiv immer weitere positive ganze Zahlen.

Es gilt wegen $a \mid b^2$, dass $u_3 = \frac{b^2}{a}$ und $u_4 = 2u_3 - u_2$ positive ganze Zahlen sind.

Weiters gilt auch, dass $\dfrac{u_4^2}{u_3} = \frac{(2u_3-u_2)^2}{u_3} = (4u_3 - 4u_2) + \frac{u_2^2}{u_3} = 4u_3 - 4u_2 + u_1$ eine ganze Zahl ist.

Damit ist alles bewiesen.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Die Antwort lautet, dass das genau dann eintritt, wenn a und b positive ganze Zahlen mit $a \leq b$ und $a \mid b^2$ sind.

Natürlich müssen a und b selbst positive ganze Zahlen sein.

Für eine Folge von positiven Zahlen gilt, dass aus $a > b$ folgt, dass die Folge streng monoton fallend ist. Das ist für eine unendliche Folge von positiven ganzen Zahlen nicht möglich. Es muss daher $a \leq b$ gelten.

Als nächstes zeigen wir, dass für $0 < a \leq b$ allgemein gilt, dass

$$u_{2n+1} = \frac{(nb - (n-1)a)^2}{a}$$

und

$$u_{2n} = \frac{((n-1)b - (n-2)a)(nb - (n-1)a)}{a}.$$

Das stimmt offensichtlich für die Anfangswerte, und auch die beiden Rekursionen lassen sich sofort aus der Definition überprüfen, wobei es keine Probleme mit dem geometrischen Mittel gibt, weil wegen $0 < a \leq b$ alle Zahlen positiv sind, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
u_{2n-1}u_{2n+1} &= \frac{((n-1)b-(n-2)a)^2(nb-(n-1)a)^2}{a^2} \\
&= \left(\frac{((n-1)b-(n-2)a)(nb-(n-1)a)}{a}\right)^2 = u_{2n}^2
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
u_{2n}+u_{2n+2} &= \frac{((n-1)b-(n-2)a)(nb-(n-1)a)}{a} + \frac{(nb-(n-1)a)((n+1)b-na)}{a} \\
&= \frac{(nb-(n-1)a)(((n+1)b-na)+((n-1)b-(n-2)a))}{a} \\
&= \frac{(nb-(n-1)a)(2nb-(2n-2)a)}{a} = 2u_{2n+1}.
\end{aligned}
$$

Wenn wir nun u_3 betrachten, erhalten wir, dass $a \mid b^2$. Andererseits sieht man sofort, dass für $a \leq b$ und $a \mid b^2$ alle Zahlen in der Folge ganze Zahlen sind. Damit ist alles bewiesen.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle reellen Zahlen α, für die es eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass*

$$f(f(x)+y) = \alpha x + f(x+f(f(y)))$$

für alle reellen Zahlen x und y gilt.

(Walther Janous)

Antwort. Für $\alpha = 0$ gibt es überabzählbar viele Lösungsfunktionen f und für $\alpha = 2$ genau die Lösung $f(x) = -x,\ x \in \mathbb{R}$.

Lösung 1. Wir bezeichnen unsere Funktionalgleichung mit (FGL).

Für $\alpha = 0$ ist jede konstante Funktion $f(t) = C$, $t \in \mathbb{R}$, mit $C \in \mathbb{R}$ Lösung von (FGL).

Sei deshalb im Weiteren $\alpha \neq 0$.

Mit $y = -f(x)$ in (FGL) erhalten wir

$$f(0) - \alpha x = f(x + f(f(f(-x)))),\ x \in \mathbb{R}.$$

Weil die linksseitige Funktion surjektiv ist, ist es auch f. Damit gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $f(b) = 0$.

Mit $x = b$ ergibt (FGL)

$$f(y) = \alpha b + f(b + f(f(y))),\ y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Weil f surjektiv ist, gibt es für jedes $z \in \mathbb{R}$ ein $y \in \mathbb{R}$ mit $z = f(y)$. Deshalb ergibt (1), dass

$$z = \alpha b + f(b + f(z)),\ z \in \mathbb{R},$$

und auch, dass f injektiv ist. Denn wir haben

$f(u) = f(v) \implies f(b+f(u)) = f(b+f(v)) \implies u - \alpha b = v - \alpha b \implies u = v.$

Somit ist f bijektiv.

Mit $x = 0$ in (FGL) folgt

$$f(f(0)+y) = f(f(f(y))),\ y \in \mathbb{R},$$

also wegen der Bijektivität

$$f(0) + y = f(f(y)),\ y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Insbesondere ergibt $y = 0$, dass $f(0) = f(f(0))$ und damit $f(0) = 0$ gelten.

Schließlich erhalten wir mit $y = 0$ in (FGL)

$$f(f(x)) = \alpha x + f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Dies und (2) führen auf $x = \alpha x + f(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Deshalb müssen etwaige Lösungen von (FGL) die Form

$$f(x) = (1-\alpha)x,\ x \in \mathbb{R}$$

haben. Alle erhaltenen Eigenschaften sind notwendig für f. Folglich müssen wir die Probe ausführen. Wir erhalten für (FGL):

$$(1-\alpha)((1-\alpha)x + y) = \alpha x + (1-\alpha)x + (1-\alpha)^3 y,\ x, y \in \mathbb{R}$$

Dies vereinfacht sich zu

$$((1-\alpha)^2 - 1)x = ((1-\alpha)^2 - 1)(1-\alpha)y,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Folglich hat $\alpha^2 - 2\alpha = 0$, d.h. $\alpha \in \{0, 2\}$ zu gelten. (Andernfalls erhielten wir, dass $x = (1-\alpha)y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ sein müsste, ein offensichtlicher Widerspruch.)

Zusammenfassung. Die Funktionalgleichung (FGL) besitzt für $\alpha \in \{0, 2\}$ Lösungen, und zwar

- für $\alpha = 0$ überabzählbar viele und
- für $\alpha = 2$ genau eine, nämlich $f(x) = -x,\ x \in \mathbb{R}$.

(Walther Janous) □

Lösung 1a. Wie zuvor zeigen wir, dass f surjektiv ist und betrachten den Fall $\alpha \neq 0$.

Wir nehmen nun an, dass $f(y_1) = f(y_2)$ und betrachten die Gleichung für diese beiden Werte von y. Die rechte Seite ist jeweils gleich, sodass wir

$$f(f(x) + y_1) = f(f(x) + y_2)$$

für alle x erhalten. Da f surjektiv ist, bedeutet das

$$f(x + d) = f(x)$$

mit $d = y_1 - y_2$ für alle x.

Wenn wir nun wieder in der Ursprungsgleichung x durch $x + d$ ersetzen, ändert sich nur der Ausdruck αx. Somit erhalten wir $\alpha x = \alpha(x + d)$, woraus wegen $\alpha \neq 0$ folgt, dass $d = 0$ und somit f injektiv ist.

Danach weiter wie in der eingereichten Lösung.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 5. *Sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, in dem jede der drei Verbindungsstrecken von Mittelpunkten gegenüberliegender Seiten die Sechsecksfläche halbiert.*

Man zeige, dass die drei Verbindungsstrecken durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

(Walther Janous)

Lösung 1. Wir werden im Folgenden die Notation $(P_1P_2 \ldots P_k)$ für die Fläche des Polygons mit den Ecken P_1, P_2, …, P_k verwenden. Weiters bezeichnen wir die Seitenmittelpunkte von AB, BC, CD, DE, EF und FA mit M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 beziehungsweise M_6. Sei X der Schnittpunkt von M_2M_5 und M_3M_6. Es gilt zu zeigen, dass M_1, X und M_4 kollinear sind.

Die Flächeninhalte der konvexen Vielecke ABM_2XM_6, M_2CM_3X, M_3DEM_5X und M_5FM_6X seien mit I, II, III und IV bezeichnet. Aus der Annahme folgt $I + II = III + IV$ und $II + III = IV + I$.

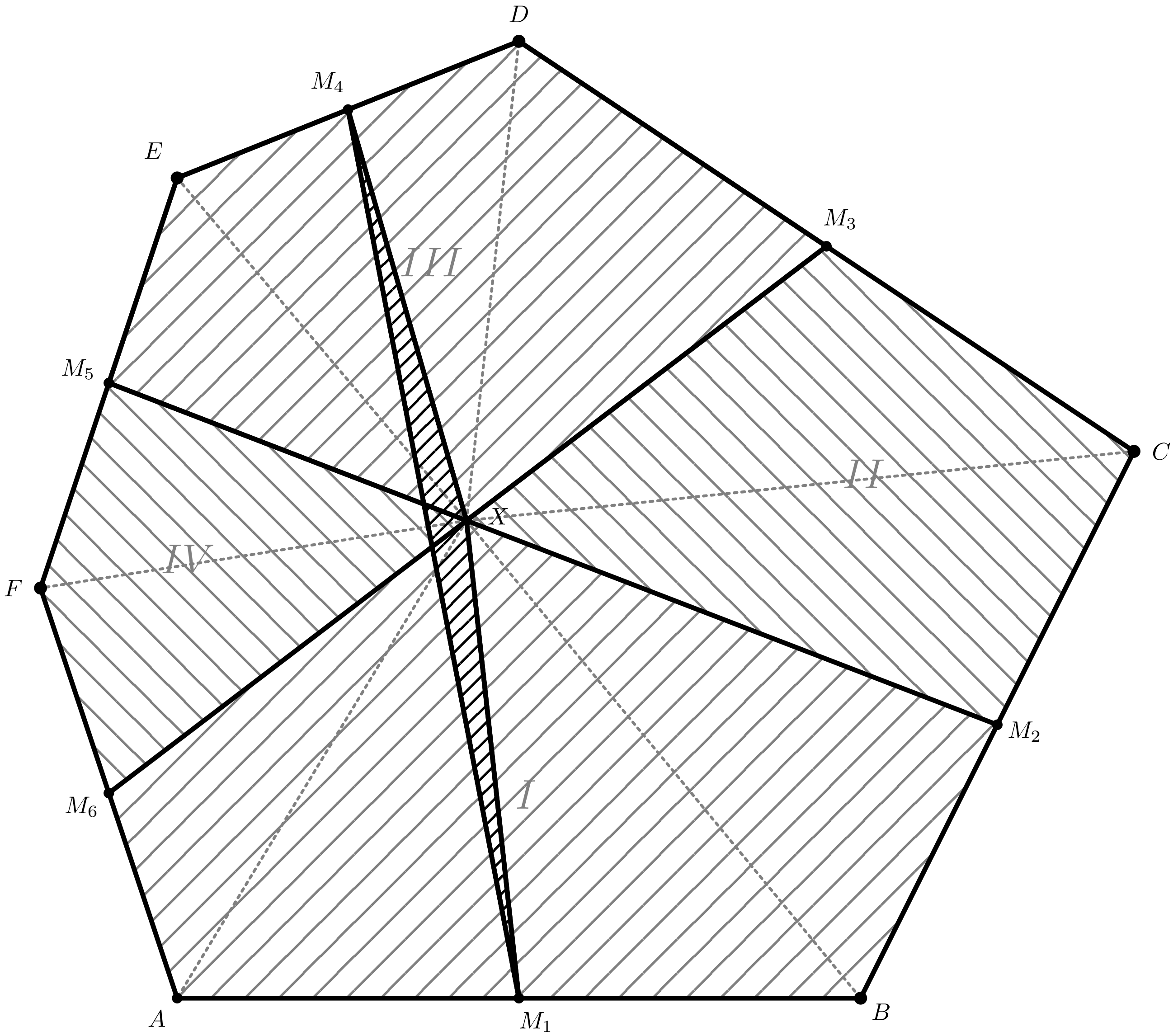

Abbildung 6: Aufgabe 5, Lösung 1

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen voneinander, erhält man $I - III = III - I$, also $III = I$, woraus sofort $II = IV$ folgt.

Weil XM_6 eine Schwerlinie im Dreieck AXF ist, gilt $(AXM_6) = (M_6XF)$. Aus der analogen Argumentation im Dreieck FXE folgt $(FXM_5) = (M_5XE)$, und insgesamt daher $(AXEF) = 2IV$. Ganz analog erhalten wir $(BCDX) = 2II$, also $(BCDX) = (AXEF)$.

Ebenfalls über die Betrachtung von Schwerlinien schließen wir, dass $(AM_1X) = (M_1BX)$ und $(XDM_4) = (XM_4E)$. Erweitern wir nun die Vielecke $BCDX$ und $AXEF$ um jeweils flächengleiche benachbarte Dreiecke, so erhalten wir $(M_4EFAM_1X) = (M_1BCDM_4X)$. Weil aber auch, nach Annahme, $(M_4EFAM_1) = (M_1BCDM_4)$ gilt, muss das Dreieck M_1XM_4 Flächeninhalt 0 haben, woraus die gewünschte Kollinearität folgt.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wir verwenden die Bezeichnungen der Punkte auch als Bezeichnungen der Vektoren vom Ursprung zum jeweiligen Punkte. Wir bezeichnen den Mittelpunkt von zwei Punkten X und Y mit M_{XY} sowie die Fläche eines Polygons $P_1 \dots P_k$ mit $(P_1 \dots P_k)$.

Aus den gegebenen Flächengleichheiten und den Eigenschaften des Kreuzprodukts folgt nun

$$\begin{aligned}2(M_{AB}BCDM_{DE}) &= M_{AB} \times B + B \times C + C \times D + D \times M_{DE} + M_{DE} \times M_{AB}\\ &= \frac{1}{2}(A+B) \times B + B \times C + C \times D + D \times \frac{1}{2}(D+E) + M_{DE} \times M_{AB}\\ &= \frac{1}{2}A \times B + B \times C + C \times D + D \times \frac{1}{2}E + M_{DE} \times M_{AB}\end{aligned}$$

und analog

$$2(M_{DE}EFAM_{AB}) = \frac{1}{2}D \times E + E \times F + F \times A + A \times \frac{1}{2}B + M_{AB} \times M_{DE}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}2(M_{AB}BCDM_{DE}) &= 2(M_{DE}EFAM_{AB})\\ \frac{1}{2}A \times B + B \times C + C \times D + D \times \frac{1}{2}E &= \frac{1}{2}D \times E + E \times F + F \times A + A \times \frac{1}{2}B + 2M_{AB} \times M_{DE}\\ B \times C + C \times D &= E \times F + F \times A + 2M_{AB} \times M_{DE}\end{aligned}$$

Mit der analogen Rechnung für die zwei anderen Verbindungsstrecken von Mittelpunkten erhalten wir die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}2M_{AB} \times M_{DE} &= B \times C + C \times D - E \times F - F \times A\\ 2M_{BC} \times M_{EF} &= C \times D + D \times E - F \times A - A \times B\\ 2M_{CD} \times M_{FA} &= D \times E + E \times F - A \times B - B \times C\end{aligned}$$

Das ergibt sofort

$$M_{CD} \times M_{FA} = M_{BC} \times M_{EF} - M_{AB} \times M_{DE}.$$

Wir wählen jetzt als Ursprung den Schnittpunkt von $M_{BC}M_{EF}$ mit $M_{AB}M_{DE}$, sodass die Vektoren M_{BC} und M_{EF} sowie die Vektoren M_{AB} und M_{DE} kollinear sind.

Somit gilt $M_{BC} \times M_{EF} = M_{AB} \times M_{DE} = 0$ und damit auch $M_{CD} \times M_{FA} = 0$ Damit sind die Vektoren M_{CD} und M_{FA} auch kollinear und der Ursprung liegt auf allen drei Verbindungsstrecken.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 6. *Auf zwei Streifen mit jeweils* 100 *Feldern, die von* 1 *bis* 100 *durchnummeriert sind, befinden sich jeweils* 50 *Spielsteine.*

Auf dem ersten Streifen liegen die Spielsteine auf den Feldern $1, 3, 5, \ldots, 99$. *Nun wird jeder Spielstein um ein oder mehrere Felder nach rechts, auf ein Feld mit größerer Nummer, verschoben. Die Spielsteine dürfen einander dabei nicht überspringen, und auf keinem der Felder dürfen zwei oder mehr Spielsteine zu liegen kommen. Es sei* A *die Anzahl der möglichen Konfigurationen der Spielsteine, die man so erreichen kann.*

Auf dem zweiten Streifen liegen die Spielsteine auf den Feldern $1, 2, 3, \ldots, 50$. *Wieder wird jeder Spielstein um ein oder mehrere Felder nach rechts verschoben. Die Spielsteine dürfen einander dabei nicht überspringen, und auf keinem der Felder dürfen zwei oder mehr Spielsteine zu liegen kommen. Zudem kann ein Spielstein nicht weiter bewegt werden als bis zum Doppelten seiner Startpostition. Es sei* B *die Anzahl der möglichen Konfigurationen der Spielsteine, die man so erreichen kann.*

Man beweise, dass $A = B$ *gilt.*

(Stephan Wagner)

Lösung 1. Für den ersten Streifen sei a_i die Anzahl der Felder, um die der i-te Stein verschoben wird. Die Bedingungen sind erfüllt, wenn $a_i \geq 1$ für alle i, sowie

$$a_1 \leq a_2 + 1 \leq a_3 + 2 \leq \cdots \leq a_{50} + 49, \tag{1}$$

damit die Spielsteine einander nicht überspringen oder auf demselben Feld zu liegen kommen können. Der Spielstein auf Nummer 99 kann nur um ein Feld bewegt werden. Also ist $a_{50} = 1$, und es folgt allgemein $a_i \leq 51 - i$. Die Zahl A ist die Anzahl der Möglichkeiten, die a_i zu wählen.

Für den zweiten Streifen sei b_i die Anzahl der Felder, um die der i-te Stein verschoben wird. Wieder muss $b_i \geq 1$ gelten, allerdings zusätzlich nach Angabe auch $b_i \leq i$. Weiters muss

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \cdots \leq b_{50} \tag{2}$$

gelten, damit die Spielsteine einander nicht überspringen oder auf demselben Feld zu liegen kommen können. Die Zahl B ist die Anzahl der Möglichkeiten, die b_i zu wählen.

Wenn man $b_i = i + 1 - a_{51-i}$ setzt, dann wird aus der Bedingung (1)

$$51 - b_{50} \leq 50 - b_{49} + 1 \leq 49 - b_{48} + 2 \leq \cdots \leq 2 - b_1 + 49,$$

was genau (2) entspricht. Zudem wird aus $1 \leq a_i \leq 51 - i$ die Ungleichung $1 \leq b_i \leq i$. Daher stellt diese Substitution eine Bijektion zwischen den jeweiligen Auswahlmöglichkeiten dar, und es gilt $A = B$.

(Stephan Wagner) □

Lösung 2. Betrachte die Menge X aller Folgen der Länge 100, die aus genau 50 Nullern und 50 Einsern bestehen, und für die der k-te Nuller für jedes $k \leq 50$ vor dem k-ten Einser kommt. Dann steht der k-te Einser an der $2k$-ten Stelle oder noch weiter rechts, weil es davor $k - 1$ Einser und mindestens k Nuller gibt. Die Positionen der Einser sind daher genau die möglichen Positionen der Spielsteine auf dem ersten Streifen, und es folgt, dass A genau die Anzahl der Folgen in der Menge X ist.

Weiters steht der k-te Nuller an der Stelle $2k - 1$ oder noch weiter links, weil es davor $k - 1$ Nuller und höchstens $k - 1$ Einser gibt. Die Positionen, die den Nullern folgen, sind daher genau die möglichen Positionen der Spielsteine auf dem zweiten Streifen, und es folgt, dass B ebenfalls genau die Anzahl der Folgen in der Menge X ist. Damit ist $A = B$.

(Theresia Eisenkölbl, Stephan Wagner) □

Lösung 3. Wir betrachten allgemeiner zwei Streifen mit jeweils $2n$ Feldern, die von 1 bis $2n$ durchnummeriert sind. Auf dem ersten Streifen stehen Spielsteine auf den Feldern $1, 3, \ldots, 2n-1$, auf dem zweiten Streifen auf den Feldern $1, 2, \ldots, n$. Es gelten ansonsten dieselben Regeln. Es sei A_n die Anzahl der möglichen Konfigurationen der Spielsteine auf dem ersten Streifen in Abhängigkeit von n, und B_n die Anzahl der möglichen Konfigurationen der Spielsteine auf dem zweiten Streifen in Abhängigkeit von n.

Man sieht leicht, dass $A_1 = B_1 = 1$ ist (auf einem Streifen mit 2 Feldern ist nur jeweils ein Zug möglich). Wir zeigen, dass A_n und B_n außerdem dieselbe Rekursion erfüllen.

Für den ersten Streifen betrachten wir den ersten Spielstein in der Reihe, der nur um 1 verschoben wird (da dies für den Spielstein auf Feld $2n-1$ jedenfalls gilt, gibt es einen solchen). Es sei dies der k-te Spielstein, der ursprünglich auf Feld $2k-1$ und danach auf Feld $2k$ liegt. Die $k-1$ Steine davor werden um mindestens 2 verschoben und liegen daher auf Feldern zwischen 3 und $2k-1$. Wenn wir sie um jeweils ein Feld zurück nach links verschieben, dann liegen sie noch immer auf möglichen Positionen, aber nunmehr zwischen 2 und $2k-2$. Sie bilden also eine mögliche Konfiguration für Spielsteine auf einem Streifen der Länge $2k-2$, wofür es A_{k-1} Möglichkeiten gibt. Für die $n-k$ Spielsteine, die nach dem k-ten Stein folgen, gibt es A_{n-k} Möglichkeiten, denn ihre Konfigurationen entsprechen genau jenen auf einem Streifen der Länge $2n-2k$, um $2k$ Felder nach rechts verschoben. Also gilt

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} A_{n-k},$$

wobei wir $A_0 = 1$ setzen (für 0 Steine gibt es genau eine Möglichkeit).

Für den zweiten Streifen betrachten wir den letzten Spielstein in der Reihe, der auf das Doppelte verschoben wird (da dies für den Spielstein auf Feld 1 jedenfalls gilt, gibt es einen solchen). Es sei dies der k-te Spielstein, der ursprünglich auf Feld k und danach auf Feld $2k$ liegt. Die $k-1$ Steine davor werden auf Felder zwischen 2 und $2k-2$ verschoben und bilden damit eine mögliche Konfiguration für Spielsteine auf einem Streifen der Länge $2k-2$, wofür es B_{k-1} Möglichkeiten gibt. Die $n-k$ Steine, die nach dem k-ten Stein folgen, werden auf Felder zwischen $2k+1$ und $2n$ verschoben, wobei der ℓ-te von ihnen mindestens auf Feld $2k+\ell$ und höchstens auf Feld $2(k+\ell)-1$ zu liegen kommt (weil er aufgrund der Wahl von k nicht auf das Doppelte verschoben wird). Wenn wir $2k-1$ substrahieren, dann erhalten wir eine mögliche Konfiguration für einen Streifen der Länge $2n-2k$, wofür es B_{n-k} Möglichkeiten gibt. Also gilt

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} B_{n-k},$$

wobei wir $B_0 = 1$ setzen (für 0 Steine gibt es genau eine Möglichkeit).

Da die Folgen A_n und B_n dieselben Anfangswerte haben und dieselbe Rekursion erfüllen, gilt $A_n = B_n$ für alle n, insbesondere für $n = 50$. Wir sehen außerdem, dass die Zahlen A_n bzw. B_n genau die *Catalanzahlen* sind.

(Theresia Eisenkölbl, Stephan Wagner) □