57. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

27. Mai 2026

---

1. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Umkreis k. Sei S der Schnittpunkt der Tangenten in A und B an den Umkreis k, sei M der Mittelpunkt von AB und sei H' der an AB gespiegelte Punkt H. Sei P der Schnittpunkt der Geraden MH mit dem Umkreis k mit der Eigenschaft, dass H zwischen M und P liegt.

   Man beweise, dass die Punkte S, H' und P auf einer Geraden liegen.

   (Karl Czakler)

2. Alice und Bob spielen ein Spiel. Zu Beginn liegt auf dem Tisch ein Haufen von n Steinen, wobei n eine positive ganze Zahl ist. In jedem Spielzug wird entweder ein Stein eines beliebigen Haufens vom Tisch entfernt, oder ein vorhandener Haufen in zwei neue nichtleere Haufen aufgeteilt. Die beiden spielen abwechselnd, wobei Alice beginnt. Wenn eine Person keinen gültigen Spielzug mehr hat, hat die andere Person gewonnen.

   Man bestimme für jedes n, wer von beiden eine Gewinnstrategie hat.

   (Theresia Eisenkölbl)

3. Man bestimme alle Werte a und b, für die eine Folge $(u_n)_{n\geq 1}$ positiver ganzer Zahlen existiert mit $u_1 = a$, $u_2 = b$ sowie

   $$u_{2n} = \mathrm{GM}(u_{2n+1}, u_{2n-1}) \quad \text{und} \quad u_{2n+1} = \mathrm{AM}(u_{2n}, u_{2n+2}) \quad \text{für } n \geq 1.$$

   Dabei bezeichne $\mathrm{AM}(x, y)$ das arithmetische und $\mathrm{GM}(x, y)$ das geometrische Mittel der beiden Zahlen x und y.

   (Theresia Eisenkölbl)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

57. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

28. Mai 2026

4. Man bestimme alle reellen Zahlen α, für die es eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(f(x) + y) = \alpha x + f(x + f(f(y)))$$

   für alle reellen Zahlen x und y gilt.

   (Walther Janous)

5. Sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, in dem jede der drei Verbindungsstrecken von Mittelpunkten gegenüberliegender Seiten die Sechsecksfläche halbiert.

   Man zeige, dass die drei Verbindungsstrecken durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

   (Walther Janous)

6. Auf zwei Streifen mit jeweils 100 Feldern, die von 1 bis 100 durchnummeriert sind, befinden sich jeweils 50 Spielsteine.

   Auf dem ersten Streifen liegen die Spielsteine auf den Feldern $1, 3, 5, \ldots, 99$. Nun wird jeder Spielstein um ein oder mehrere Felder nach rechts, auf ein Feld mit größerer Nummer, verschoben. Die Spielsteine dürfen einander dabei nicht überspringen, und auf keinem der Felder dürfen zwei oder mehr Spielsteine zu liegen kommen. Es sei A die Anzahl der möglichen Konfigurationen der Spielsteine, die man so erreichen kann.

   Auf dem zweiten Streifen liegen die Spielsteine auf den Feldern $1, 2, 3, \ldots, 50$. Wieder wird jeder Spielstein um ein oder mehrere Felder nach rechts verschoben. Die Spielsteine dürfen einander dabei nicht überspringen, und auf keinem der Felder dürfen zwei oder mehr Spielsteine zu liegen kommen. Zudem kann ein Spielstein nicht weiter bewegt werden als bis zum Doppelten seiner Startpostition. Es sei B die Anzahl der möglichen Konfigurationen der Spielsteine, die man so erreichen kann.

   Man beweise, dass $A = B$ gilt.

   (Stephan Wagner)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2026`