

57. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde – Lösungen

2. Mai 2026

Aufgabe 1. Man beweise, dass für alle ganzen Zahlen $n \geq 2$ die Ungleichung

$$\sqrt[2]{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{\dots + \sqrt[n]{n}}}} < 2$$

gilt.

(Walther Janous)

Lösung 1. • Für $n = 2$ ist die Ungleichung wegen $\sqrt{2} < 2$ klar.

- Sei deshalb im Weiteren $n \geq 3$ gegeben.
Wir definieren die Folge $(w_k)_{n \geq k \geq 2}$ rekursiv als

$$w_n = \sqrt[n]{n} \text{ und } w_k = \sqrt[k]{k + w_{k+1}} \text{ für } n - 1 \geq k \geq 2$$

und werden den Beweis mit Hilfe einer „Induktion von innen nach außen“ führen. Dafür benötigen wir die für $k \geq 3$ gültige Hilfsungleichung

$$\sqrt[k]{k + 2} < 2. \quad (H)$$

Sie ist äquivalent zu $2^k > k + 2$, d.h. $(1 + 1)^k > k + 2$. Mit dem binomischen Lehrsatz haben wir aber

$$(1 + 1)^k > 1 + k + \frac{k(k-1)}{2} > 1 + k + \frac{2 \cdot 1}{2} = k + 2.$$

Wir zeigen nun, dass für $n \geq k \geq 2$ die Ungleichung $w_k < 2$ erfüllt ist.

- Für $k = n$ ergibt (H), dass $w_n = \sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+2} < 2$.
- Die Ungleichung $w_k < 2$ gelte für $k = n, n-1, \dots, K$, mit $K \geq 4$.
- Daraus ergibt sich mit (H), dass

$$w_{K-1} = \sqrt[K-1]{K-1 + w_K} < \sqrt[K-1]{K-1 + 2} = \sqrt[K-1]{K+1} < 2.$$

- Die Abschätzung

$$w_2 = \sqrt{2 + w_3} < \sqrt{2 + 2} = 2$$

schließt den Beweis unserer Ungleichung ab.

(Walther Janous) \square

Lösung 2. Wir zeigen als erstes, dass

$$\sqrt[k]{k+x} < \sqrt{2+x} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_{\geq 4}, x > 0$$

gilt. Diese folgt aber aus

$$(k+x)^2 = k^2 + 2kx + x^2 < 2^k + k2^{k-1}x + 2^{k-2} \binom{k}{2} x^2 < (2+x)^k,$$

denn für $k \geq 4$ gelten $k^2 \leq 2^k$, $2k \leq k2^{k-1}$ und $1 \leq 2^{k-2} \binom{k}{2}$. Damit erhalten wir

$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{4 + \dots + \sqrt[n]{n}}}} < \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}$$

Durch Induktion zeigt man leicht, dass

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} < 2.$$

Somit folgt die behauptete Ungleichung für $n \geq 4$ aus

$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + 2}} < 2$$

und die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ folgen daraus ebenfalls.

(Gerhard Kirchner) \square

Aufgabe 2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Es werde ein Punkt D im Inneren des Dreiecks so gewählt, dass

$$\sphericalangle DBA + 2 \cdot \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD = 180^\circ.$$

Seien I, J und K die Mittelpunkte der Strecken DA, DB bzw. DC .

Man zeige, dass es einen Punkt X gibt, der unabhängig von der Wahl von D auf dem Umkreis von IJK liegt.

(Dominik Pultar)

Lösung 1. Sei M der Mittelpunkt der Seite BC und sei D' der an M gespiegelte Punkt D . Wir zeigen, dass $ABD'C$ ein Sehnenviereck ist, und damit D' auf dem Umkreis von ABC liegt:

$$\begin{aligned} \sphericalangle CDB &= 180^\circ - \sphericalangle CBD - \sphericalangle DCB \\ &= 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle BAC - \sphericalangle DBA - \sphericalangle ACD) \\ &= \sphericalangle BAC + \sphericalangle DBA + \sphericalangle ACD \\ &= 180^\circ - \sphericalangle BAC. \end{aligned}$$

Hier wurden die Winkelsummen in den Dreiecken DBC und ABC sowie die gegebene Eigenschaft $2\sphericalangle BAC + \sphericalangle DBA + \sphericalangle ACD = 180^\circ$ verwendet.

Offensichtlich sind I, J und K sowie M die Bilder der Punkte A, B und C sowie D' unter zentrischer Streckung in D mit Faktor $\frac{1}{2}$. Also liegt M auf dem Umkreis von IJK , weil dieser das Bild des Umkreises von ABC unter dieser zentrischen Streckung ist. Da die Lage von M unabhängig von D ist, ist die Behauptung bewiesen.

(Dominik Pultar) \square

Lösung 1a. Wie in Lösung 1 zeigen wir, dass $\sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$. Sei M der Mittelpunkt von BC . Wir werden zeigen, dass M auf dem Umkreis von IJK liegt.

Nach dem Strahlensatz (mit Zentrum D) ist IJ parallel zu AB und IK parallel zu AC . Also gilt $\sphericalangle BAC = \sphericalangle JIK$. Wählt man als Zentrum B , so sieht man, dass MJ parallel zu CD ist. Mit Zentrum C folgt, dass MK parallel zu BD ist. Also ist $DJMK$ ein Parallelogramm, und damit $\sphericalangle KMJ = \sphericalangle JDK = \sphericalangle BDC$. Aus den zuvor gezeigten Identitäten $\sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle JIK$ folgt nun $\sphericalangle KMJ = 180^\circ - \sphericalangle JIK$, und damit, dass M wie behauptet auf dem Umkreis von IJK liegt.

(Dominik Pultar) \square

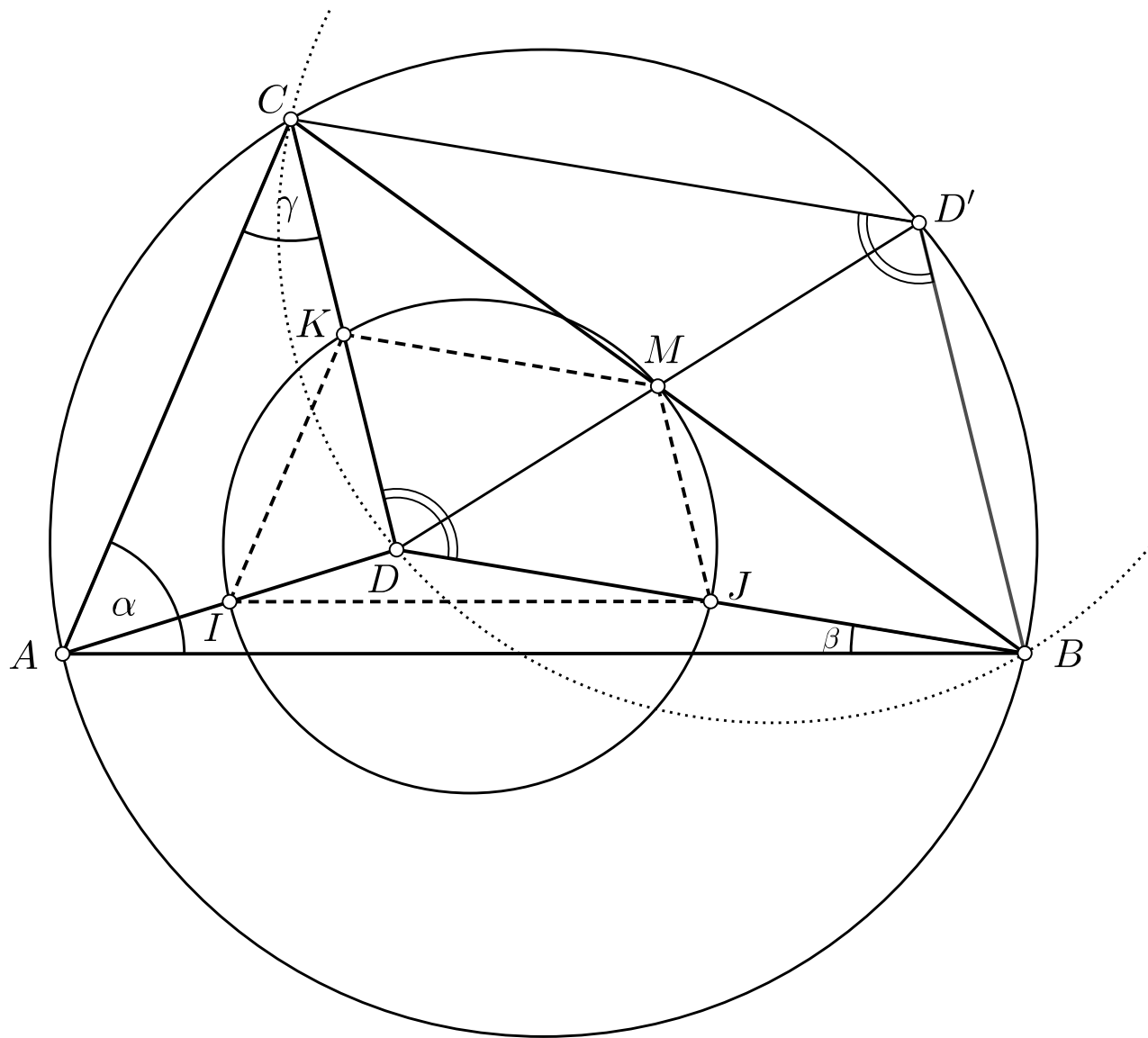


Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Lösung 2. Zunächst ermitteln wir den Ort aller solcher Punkte D konstruktiv. Dazu zeichnen wir den Umkreismittelpunkt O des Dreiecks ABC ein. Dies ist naheliegend, weil nach dem Zentriwinkelsatz $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC$ gilt. Es gilt $\sphericalangle CBO + \sphericalangle OCB + 2\sphericalangle BAC = 180^\circ$. Eine mögliche Wahl für den Punkt D ist daher derjenige Punkt D_1 , für den $\sphericalangle D_1BA = \sphericalangle CBO$ und $\sphericalangle ACD_1 = \sphericalangle OCB$ gilt, also der zu O isogonal konjugierte Punkt. Bekanntermaßen ist dieser Punkt der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC . Jeder andere Punkt D mit $\sphericalangle DBA + \sphericalangle ACD + 2\sphericalangle BAC = 180^\circ$ erfüllt $\sphericalangle DBA + \sphericalangle ACD = \sphericalangle HBA + \sphericalangle ACH$. Daher gilt

$$\sphericalangle DBH = \sphericalangle DBA - \sphericalangle HBA = \sphericalangle ACH - \sphericalangle ACD = \sphericalangle DCH,$$

also liegt D auf dem Kreis durch B, C und H .

Es ist bekannt, dass das Bild von H unter Spiegelung an BC auf dem Umkreis k von ABC liegt. Umgekehrt liegt D also auf dem Spiegelbild k' des Umkreises von ABC bezüglich der Geraden BC . Aus Symmetriegründen ist der Kreis k' ebenso das Bild von k unter Punktspiegelung an M . Also liegt auch das Spiegelbild D' von D um M auf dem Kreis k . Das heißt aber, dass M auf dem Bild von k unter der zentrischen Streckung in D mit Faktor $\frac{1}{2}$ liegt, also genau auf dem Umkreis von IJK , womit die Behauptung gezeigt ist (mit $X = M$).

(Josef Greilhuber) \square

Aufgabe 3. Eine Liste von Zahlen heiße produktiv, wenn sie zwei verschiedene Zahlen enthält, deren Produkt in der Liste steht.

Was ist die kleinste Zahl k , sodass man aus der Liste

$$1, 2, \dots, 2025, 2026$$

durch Streichung von k Zahlen eine Liste erhalten kann, die nicht produktiv ist?

(Walther Janous)

Antwort. 44

Lösung. Wegen $45^2 = 2025$ gilt $45 \cdot 46 > 2026$. Wir bemerken daher, dass wir die Zahlen $1, 2, 3, \dots, 44$ aus der Liste streichen können, wonach die Liste

$$45, 46, 47, \dots, 2025, 2026$$

übrig bleibt, die sicher nicht produktiv ist. Es gilt somit sicher $k \leq 44$.

Nun stellt sich die Frage, ob $k < 44$ gelten kann. Dies ist nicht möglich. Um dies einzusehen, betrachten wir die 43 Tripel

$$(2, 87, 2 \cdot 87), (3, 86, 3 \cdot 86), \dots, (44, 45, 44 \cdot 45).$$

Alle Zahlen, die in diesen Tripeln vorkommen, kommen auch in der Ausgangsliste vor, und keine Zahl kommt gleichzeitig in zwei Tripeln vor. Wir sehen, dass wir aus jedem Tripel eine Zahl streichen müssen, um eine nicht-produktive Liste zu erhalten. Ferner muss wegen $1 \cdot a = a$ für alle a die Zahl 1 ebenfalls sicher aus der Liste gestrichen werden. Wir sehen, dass mindestens 44 Zahlen gestrichen werden müssen, um eine nicht-produktive Liste zu erhalten, und es gilt somit $k = 44$.

(Walther Janous) \square

Aufgabe 4. Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ positiver ganzer Zahlen heiße k -schön, wenn für alle $n \geq 0$ die Eigenschaft $a_n = a_{n+k}$ und für alle $n \geq 1$ die Eigenschaft

$$a_{n-1} + a_{n+1} \mid a_n^2 + k$$

erfüllt ist. Für welche positiven ganzen Zahlen k gibt es eine k -schöne Folge?

(Dominik Pultar, Jan Strehn)

Antwort. Für alle k , mit Ausnahme von $k = 2$.

Lösung. Für alle ungeraden Werte von k ist die konstante Folge, die durch $a_n = 1$ für alle n gegeben ist, offensichtlich k -schön, denn es gilt $a_n = a_{n+k} = 1$ für alle $n \geq 0$, und $2 = a_{n-1} + a_{n+1}$ ist ein Teiler von $a_n^2 + k = 1 + k$.

Für gerades k gibt es ebenfalls eine k -schöne Folge, sofern $k \geq 4$. Dazu beobachten wir zunächst, dass a_{n-1}, a_n, a_{n+1} die zweite Bedingung in jedem der folgenden Fälle erfüllen:

- (11 k): $a_{n-1} = a_n = 1, a_{n+1} = k$, denn $a_{n-1} + a_{n+1} = 1 + k$ teilt $a_n^2 + k = 1 + k$.
- (1 k 1): $a_{n-1} = a_{n+1} = 1, a_n = k$, denn $a_{n-1} + a_{n+1} = 2$ teilt $a_n^2 + k = k^2 + k$.
- (k 11): $a_n = a_{n+1} = 1, a_{n-1} = k$, denn $a_{n-1} + a_{n+1} = 1 + k$ teilt $a_n^2 + k = 1 + k$.
- (k k 1): $a_{n-1} = a_n = k, a_{n+1} = 1$, denn $a_{n-1} + a_{n+1} = 1 + k$ teilt $a_n^2 + k = k^2 + k$.
- (1 k k): $a_n = a_{n+1} = k, a_{n-1} = 1$, denn $a_{n-1} + a_{n+1} = 1 + k$ teilt $a_n^2 + k = k^2 + k$.

Damit können wir nun k -schöne Folgen für alle geraden $k \geq 4$ konstruieren, wobei wir drei Fälle unterscheiden:

- $k \equiv 0 \pmod{3}$: hier verwenden wir die Folge $1, 1, k, 1, 1, k, \dots$, die Periode 3 hat und damit auch die Bedingung $a_n = a_{n+k}$ erfüllt. Die drei Werte a_{n-1}, a_n, a_{n+1} fallen immer in einen der obigen Fälle.
- $k \equiv 1 \pmod{3}$: hier verwenden wir die Folge, die mit den k Werten

$$1, 1, k, 1, 1, k, \dots, 1, 1, k, 1, 1, k, k$$

beginnt ($\frac{k-4}{3}$ Mal der Block $1, 1, k$, gefolgt von $1, 1, k, k$) und dann periodisch fortgesetzt wird (d.h., der Block aus den ersten k Werten wird wiederholt). Damit ist die Bedingung $a_n = a_{n+k}$ erfüllt, und die drei Werte a_{n-1}, a_n, a_{n+1} fallen wiederum immer in einen der obigen Fälle.

- $k \equiv 2 \pmod{3}$: hier verwenden wir die Folge, die mit den k Werten

$$1, 1, k, 1, 1, k, \dots, 1, 1, k, 1, 1, k, k, 1, 1, k, k$$

beginnt ($\frac{k-8}{3}$ Mal der Block $1, 1, k$, gefolgt von zweimal $1, 1, k, k$) und dann periodisch fortgesetzt wird. Wie im vorherigen Fall ist die Bedingung $a_n = a_{n+k}$ erfüllt, und die drei Werte a_{n-1}, a_n, a_{n+1} fallen immer in einen der obigen Fälle.

Es bleibt zu zeigen, dass es keine 2-schönen Folgen gibt. Angenommen, $(a_n)_{n \geq 0}$ wäre eine solche Folge. Es sei $a = a_0 = a_2 = \dots$ und $b = a_1 = a_3 = \dots$. Dann muss $2a = a_0 + a_2$ ein Teiler von $b^2 + 2 = a_1^2 + 2$ sein, und ebenso $2b = a_1 + a_3$ ein Teiler von $a^2 + 2 = a_2^2 + 2$. Insbesondere sind $a^2 + 2$ und $b^2 + 2$ also gerade, und damit a und b ebenfalls gerade. Nun gilt jedoch $a^2 + 2 \equiv b^2 + 2 \equiv 2 \pmod{4}$, sodass $a^2 + 2$ und $b^2 + 2$ nicht durch 4 teilbar sind. Andererseits sind $2a$ und $2b$ Vielfache von 4, wir erhalten also einen Widerspruch.

(Stephan Wagner) \square