57. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb

16. Juni 2026

1. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a+b \neq c$, $b+c \neq a$ und $c+a \neq b$.

   Man beweise, dass mindestens eine der drei Zahlen

   $$\frac{c}{a+b-c}, \quad \frac{a}{b+c-a}, \quad \frac{b}{c+a-b}$$

   kleiner oder gleich 1 ist.

   (Karl Czakler)

2. Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, $AB > CD$ und $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CBA = 90^\circ$. Weiters seien M und N die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. CD.

   Man beweise:

   $$2 \cdot MN = AB - CD.$$

   (Karl Czakler)

3. Jeder Spielstein eines Dominospiels besteht aus zwei Hälften. Auf jeder Hälfte steht eine der Zahlen 0, 1, ..., 6. Es kommen alle Spielsteine $\boxed{a|b}$ mit $0 \leq a \leq b \leq 6$ genau einmal vor. Wir betrachten $\boxed{b|a}$ als denselben Stein wie $\boxed{a|b}$.

   Eine *Reihe* entsteht, wenn man mindestens zwei Steine so hintereinander legt, dass die Zahlen auf benachbarten Hälften hintereinander liegender Steine stets übereinstimmen.

   Eine Reihe heißt *geschlossen*, wenn auch an den beiden Enden der Reihe die gleiche Zahl steht.

   Zum Beispiel ist $\boxed{0|2}$, $\boxed{2|4}$, $\boxed{4|4}$, $\boxed{4|0}$ eine geschlossene Reihe.

   Man bestimme die größte Anzahl von geschlossenen Reihen, die man mit dem Dominospiel zugleich bilden kann. (Dabei dürfen auch Steine übrig bleiben.)

   (Karl Czakler)

4. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen k, für die

   $$2^k + 3^k + 4^k$$

   eine Quadratzahl ist.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.