57. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde

2. Mai 2026

1. Man beweise, dass für alle ganzen Zahlen $n \geq 2$ die Ungleichung

$$\sqrt[2]{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{\ldots+\sqrt[n]{n}}}}<2$$

gilt.

(Walther Janous)

2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Es werde ein Punkt D im Inneren des Dreiecks so gewählt, dass

$$\sphericalangle DBA + 2 \cdot \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD = 180^\circ.$$

Seien I, J und K die Mittelpunkte der Strecken DA, DB bzw. DC.

Man zeige, dass es einen Punkt X gibt, der unabhängig von der Wahl von D auf dem Umkreis von IJK liegt.

(Dominik Pultar)

3. Eine Liste von Zahlen heiße *produktiv*, wenn sie zwei verschiedene Zahlen enthält, deren Produkt in der Liste steht.

Was ist die kleinste Zahl k, sodass man aus der Liste

$$1, 2, \ldots, 2025, 2026$$

durch Streichung von k Zahlen eine Liste erhalten kann, die nicht produktiv ist?

(Walther Janous)

4. Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ positiver ganzer Zahlen heiße *k-schön*, wenn für alle $n \geq 0$ die Eigenschaft $a_n = a_{n+k}$ und für alle $n \geq 1$ die Eigenschaft

$$a_{n-1} + a_{n+1} \mid a_n^2 + k$$

erfüllt ist. Für welche positiven ganzen Zahlen k gibt es eine k-schöne Folge?

(Dominik Pultar, Jan Strehn)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.