57. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

26. März 2026

Aufgabe 1. *Seien a und b positive reelle Zahlen mit*

$$(a+4)(b+1) = 24.$$

Man beweise die Ungleichung

$$a^2 + b^2 \geq 13.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Karl Czakler)

Lösung 1. Mit Hilfe der Ungleichungen $a^2+4 \geq 4a$ und $b^2+9 \geq 6b$ (mit Gleichheitsfall $a=2$ und $b=3$) erhält man zunächst

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a^2+4) + (b^2+9) - 13 \\ &\geq 4a + 6b - 13 \\ &= 4(a+4) + 6(b+1) - 35 \end{aligned}$$

Wendet man nun die AM-GM Ungleichung (wieder mit dem Gleichheitsfall $a=2$, $b=3$: $4(2+4) = 6(3+1)$) an, erhält man

$$\begin{aligned} 4(a+4) + 6(b+1) - 35 &\geq 2\sqrt{24(a+4)(b+6)} - 35 \\ &= 2\sqrt{24^2} - 35 \\ &= 13, \end{aligned}$$

also insgesamt $a^2+b^2 \geq 13$, was zu beweisen war.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Aus $(a+4)(b+1) = 24$ folgt

$$b = \frac{20-a}{a+4}$$

und somit

$$a^2 + b^2 = a^2 + \frac{(20-a)^2}{(a+4)^2}.$$

Er reicht daher, die folgende Ungleichung zu zeigen:

$$a^2 + \frac{(20-a)^2}{(a+4)^2} \geq 13.$$

Diese ist aber äquivalent zu

$$a^2(a+4)^2 + (20-a)^2 - 13(a+4)^2 \geq 0.$$

Wegen

$$a^2(a+4)^2 + (20-a)^2 - 13(a+4)^2 = (a-2)^2((a+6)^2+12)$$

ist diese aber immer erfüllt. Der Gleichheitsfall ist $a=2$ und $b = (20-2)/(2+4) = 3$.

(Karl Czakler) □

Lösung 3. Mit $A = a + 4$ und $B = b + 1$ haben wir $A > 4$, $B > 1$ und $AB = 24$, also $A = 24/B$, und wir müssen die Ungleichung

$$(A - 4)^2 + (B - 1)^2 \geq 13$$

nachweisen. Durch schrittweises Umformen ergeben sich folgende äquivalente Ungleichungen:

$$\begin{gathered}(24/B - 4)^2 + (B - 1)^2 \geq 13,\\ 16(B - 6)^2 + B^2(B - 1)^2 \geq 13B^2,\\ B^4 - 2B^3 + 4B^2 - 12 \cdot 16B + 16 \cdot 36 \geq 0,\end{gathered}$$

d.h. mit $B = 2C$ samt $C > 1/2$:

$$C^4 - C^3 + C^2 - 24C + 36 \geq 0.$$

Beispielsweise mit dem Hornerschema erhält man unschwer die faktorisierte Form

$$(C - 2)^2 \ \left(C^2 + 3\,C + 9\right) \geq 0$$

der letzten Ungleichung. Sie zeigt einerseits die Gültigkeit der in Rede stehenden Aussage und auch, dass sich Gleichheit genau für $C = 2$, also $B = 4$, d.h. $b = 3$ ergibt Daraus folgt aber $a = 2$.

(Walther Janous) □

Lösung 4. Aufgrund des Gleichheitsfalls $a = 2$, $b = 3$ substituieren wir $a = 2 + x$, $b = 3 + y$. Die Nebenbedingung $(a + 4)(b + 1) = 24$ wird zu

$$24 = (a + 4)(b + 1) = (6 + x)(4 + y) = 24 + 4x + 6y + xy,$$

also zu

$$xy + 4x + 6y = 0.$$

Zu zeigen ist

$$13 \leq (2 + x)^2 + (3 + y)^2 = 4 + x^2 + 4x + 9 + 6y + y^2$$

bzw.

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y \geq 0.$$

Es genügt also, zu zeigen, dass

$$x^2 + y^2 - xy \geq 0.$$

Dies ist (nach Multiplikation mit 2) äquivalent zu

$$x^2 + y^2 + (x - y)^2 \geq 0,$$

was offensichtlich richtig ist. Gleichheit gilt nur für $x = y = 0$, also $a = 2$, $b = 3$.

(Manuel Zöttl) □

Aufgabe 2. *Sei k der Umkreis eines Quadrats $ABCD$. Sei P ein Punkt auf dem kürzeren Kreisbogen CD von k mit $P \neq C$ und $P \neq D$. Der Schnittpunkt der Geraden BP mit der Geraden AC sei Q, der Schnittpunkt der Geraden CP mit der Geraden AD sei R.*

Man beweise, dass die Gerade RQ normal auf die Gerade AC steht.

(Karl Czakler)

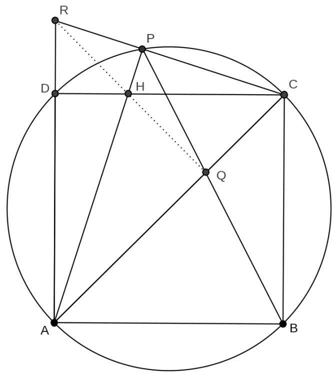

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Lösung 1. Es sei H der Schnittpunkt von AP mit CD. Da $\sphericalangle APC = 90^0$ gilt, ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ACR. Wegen

$$\sphericalangle HPQ = \sphericalangle APB = \sphericalangle ACB = 45^0 = \sphericalangle ACD$$

ist das Viereck $HQCP$ ein Sehnenviereck und daher gilt

$$90^0 = \sphericalangle APC = \sphericalangle HPC = \sphericalangle HQC.$$

Daraus folgt aber, dass Q der Höhenfußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt R ist und alles ist gezeigt.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Sei H der Schnittpunkt von AP mit CD. Da $\sphericalangle APC = 90^0$ gilt, ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ACR. Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt:

$$\sphericalangle HAQ = \sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC = \sphericalangle QBC.$$

Da aus Symmetriegründen $\sphericalangle QBC = \sphericalangle CDQ = \sphericalangle HDQ$ gilt, folgt

$$\sphericalangle HDQ = \sphericalangle HAQ$$

und daher ist das Viereck $AQHD$ ein Sehnenviereck. Somit gilt

$$\sphericalangle HQA = \sphericalangle ADH = 90^0.$$

(Karl Czakler) □

Lösung 3. Seien o. B. d. A. $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$ und $D = (-1, 1)$. Dann hat k den Ursprung als Mittelpunkt und den Radius $\sqrt{2}$. Sei weiters $P = (c\sqrt{2}, s\sqrt{2})$, wobei c und s für $\cos\varphi$ bzw. $\sin\varphi$ mit $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$ stehen.

- Bestimmung von Q. Die Gerade BP ist durch

  $$(x, y) = (1 + t(c\sqrt{2} - 1), -1 + t(s\sqrt{2} + 1)),\ t \in \mathbb{R},$$

  gegeben. Weil die x- und y-Koordinaten aller Punkte auf der Geraden AC übereinstimmen, erhalten wir

  $$1 + t(c\sqrt{2} - 1) = -1 + t(s\sqrt{2} + 1),\ \text{d.h. } t(\sqrt{2}(s - c) + 2) = 2$$

  und daraus

  $$t = \frac{\sqrt{2}}{s - c + \sqrt{2}} \text{ samt } Q = \Big(\frac{c + s}{s - c + \sqrt{2}}, \frac{c + s}{s - c + \sqrt{2}}\Big).$$

- Bestimmung von R. Die Geraden AD bzw. CP sind durch $x = -1$ bzw.

$$(x, y) = (1 + t(c\sqrt{2} - 1), 1 + t(s\sqrt{2} - 1)),\ t \in \mathbb{R},$$

bestimmt. Folglich muss

$$1 + t(c\sqrt{2} - 1) = -1,\ \text{d.h. } t = \frac{2}{1 - c\sqrt{2}}$$

gelten. Damit haben wir

$$R = \Big(-1, \frac{2s\sqrt{2} - c\sqrt{2} - 1}{1 - c\sqrt{2}} \Big).$$

- Für den Vektor $\overrightarrow{RQ} = (x_1, y_1)$ erhalten wir demnach

$$x_1 = \frac{c + s}{s - c + \sqrt{2}} + 1 = \frac{2s + \sqrt{2}}{s - c + \sqrt{2}}$$

und

$$y_1 = \frac{c + s}{s - c + \sqrt{2}} + \frac{1 + c\sqrt{2} - 2s\sqrt{2}}{1 - c\sqrt{2}}.$$

Wenn man die rechtsseitige Summe auf gemeinsamen Nenner bringt, lautet der Zähler

$$c + s - c^2\sqrt{2} - sc\sqrt{2} + s + sc\sqrt{2} - 2s^2\sqrt{2} - c - c^2\sqrt{2} + 2sc\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2c - 4s,\ \text{d.h.}$$

$$2c - 2s - 2c^2\sqrt{2} - 2s^2\sqrt{2} + 2sc\sqrt{2} + \sqrt{2}.$$

Wegen $c^2 + s^2 = 1$ vereinfacht sich dies zu

$$2c - 2s + 2sc\sqrt{2} - \sqrt{2} = (c\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 2s).$$

Folglich gilt

$$y_1 = -\frac{2s + \sqrt{2}}{s - c + \sqrt{2}},$$

d. h. $y_1 = -x_1$ samt $\overrightarrow{RQ} = x_1 \cdot (1, -1)$. Dies und $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot (1, 1)$ ergeben die Behauptung.

(Walther Janous) □

Lösung 4. Im Weiteren benötigen wir folgende Tatsache:
Eine Gerade durch zwei Punkte $P = p$ und $Q = q$ am Einheitskreis mit $p, q \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$z + pq\overline{z} = p + q.$$

O. B. d. A. sei k der Einheitskreis, es liege der Quadratmittelpunkt (und damit der Mittelpunkt von k) im Ursprung und es sei $C = 1$. Dann sind $D = i$, $A = -1$ und $B = -i$. Der Punkt P sei als $P = \lambda$ mit $\lambda = \cos\varphi + i\sin\varphi$ mit $0 < \varphi < \pi/2$ gegeben.
Damit erhalten wir die Gleichungen

- AC: $z - \overline{z} = 0$
- BP: $z - i\lambda\overline{z} = \lambda - i$
- AD: $z - i\overline{z} = i - 1$
- CP: $z + \lambda\overline{z} = \lambda + 1$

Die Schnittpunkte $Q = q$ und $R = r$ ergeben sich folgendermaßen:

- $q - \overline{q} = 0$ und $q - i\lambda\overline{q} = \lambda - i$ führen auf $q(1 - i\lambda) = \lambda - i$, d.h. $q = \frac{\lambda - i}{1 - i\lambda}$, also $q = \frac{i\lambda+1}{\lambda+i}$.
- Wenn man in $r - i\overline{r} = i - 1$ und $r + \lambda\overline{r} = \lambda + 1$ die erste Gleichung mit λ und die zweite mit i multipliziert und dann addiert, ergibt sich $r(\lambda + i) = i\lambda - \lambda + i\lambda + i$, also $r = \frac{2i\lambda - \lambda + i}{\lambda + i}$.

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass $r - q$ ein reelles Vielfaches von i ist. Wir haben

$$r - q = \tfrac{i\lambda - \lambda + i - 1}{\lambda + i}, \text{ d.h.}$$
$$r - q = \tfrac{(\lambda+1)(i-1)}{\lambda+i}, \text{ also}$$
$$r - q = \tfrac{(\lambda+1)(\overline{\lambda}-i)(i-1)}{|\lambda+i|^2}, \text{ was sich wegen } \lambda\overline{\lambda} = 1 \text{ zu}$$
$$r - q = \tfrac{i-1}{|\lambda+i|^2}(1 + \overline{\lambda} - i\lambda - i) \text{ vereinfacht.}$$

Man rechnet unschwer nach, dass für jede komplexe Zahl λ die Beziehung $\overline{\lambda} - i\lambda = (\Re(\lambda) + \Im(\lambda))(1 - i)$ gilt. Folglich haben wir

$$r - q = \tfrac{\Re(\lambda)+\Im(\lambda)+1}{|\lambda+i|^2}(i-1)(1-i).$$

Wegen $(i - 1)(1 - i) = i - 1 + 1 + i = 2i$ sind wir am Ende des Beweises.

(Walther Janous) □

Aufgabe 3. *Sei n eine positive ganze Zahl. Eine Menge positiver ganzer Zahlen heiße* luftig, *wenn sie keine zwei benachbarten Zahlen enthält. Für jede luftige Teilmenge der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ wird das Produkt ihrer Elemente berechnet, dann werden die Quadrate aller dieser Produkte addiert, wobei der leeren Teilmenge das Produkt 1 zugewiesen wird.*

Man bestimme diese Summe s_n.

Beispiel: $n = 3$

Die luftigen Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$ sind $\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ und $\{1, 3\}$. Für die Produkte erhalten wir:

$\{\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,3\}$
1	1	2	3	3

Die Summe der Quadrate ergibt also $s_3 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24$.

(Walther Janous)

Lösung 1. Wir untersuchen zuerst kleine Fälle von n.

- $s_1 = 1^2 + 1^2 = 2$
- $s_2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$
- $s_3 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + (1 \cdot 3)^2 = 24$
- $s_4 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^2 + (1 \cdot 3)^2 + (1 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 4)^2 = 120$

Wenn wir diese Summenwerte mit den entsprechenden Werten von $n!$ vergleichen, gelangen wir zur Vermutung $s_n = (n + 1)!$, die wir im Weiteren durch eine zweistufige Induktion beweisen werden.

- Der Induktionsanfang findet sich am Beginn der Lösung, nämlich die Fälle $n = 1$ und $n = 2$.
- Es sei nun vorausgesetzt, dass $s_{n-1} = n!$ und $s_n = (n + 1)!$ für ein $n \geq 2$ gelten.
- Für den Induktionsschritt beachten wir, dass es für die Teilmengen T von $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ zwei Möglichkeiten gibt, nämlich:
  - $n + 1 \notin T$. Dafür erhalten wir für s_{n+1} den Summenbeitrag s_n.
  - $n+1 \in T$. Dann gilt $n \notin T$ und alle weiteren Elemente von T sind in der Menge $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Daher erhalten wir den Summenbeitrag $(n + 1)^2 \cdot s_{n-1}$.

Deshalb folgt

$$s_{n+1} = s_n + (n+1)^2 s_{n-1},$$

also laut Induktionsannahme

$$s_{n+1} = (n+1)! + (n+1)^2 n! = (n+1)!(n+2) = (n+2)!$$

und wir sind am Ende des Beweises.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Nach Ansehen von kleinen Fällen vermuten wir, dass die gesuchte Anzahl $(n+1)!$ ist. Wir wollen dafür im Folgenden einen bijektiven Beweis geben.

Dazu definieren wir eine luftige Menge mit Label als ein Paar (L, c), wobei L eine luftige Menge positiver ganzer Zahlen ist und $c : L \mapsto (a, b)$ eine Funktion ist, die jedem Element von L ein Paar natürlicher Zahlen mit $c(k) = (a, b)$ zuordnet, wobei $1 \leq a \leq k$ und $0 \leq b \leq k-1$. Da es für eine Zahl k also k^2 mögliche Paare gibt, ist die Anzahl der luftigen Teilmengen mit Label von $\{1, 2, \dots, n\}$ die gesuchte Summe der Quadrate der Produkte der Elemente von luftigen Teilmengen. Wir bezeichnen die Menge aller luftigen Teilmengen mit Label von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit $\mathcal{L}_n$.

In ähnlicher Weise definieren wir Mengen mit Label als ein Paar (M, c'), wobei M eine Menge positiver ganzer Zahlen ist, und $c'(M) = a$ eine Funktion ist, die jedem Element von M eine natürliche Zahl a mit $1 \leq a \leq k$ zuordnet. Wir bezeichnen die Menge aller Teilmengen mit Label von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit $\mathcal{M}_n$.

Lemma.

$$\#\mathcal{M}_n = (n+1)!$$

Beweis. Wenn wir fehlende Zahlen als Zahlen mit Bezeichnung 0 ansehen, gibt es offensichtlich $(n+1)!$ Möglichkeiten, die Zahlen 1 bis n zu bezeichnen, sodass $0 \leq c(k) \leq k$. ■

Lemma.

$$\#\mathcal{L}_n = \#\mathcal{M}_n.$$

Beweis. Wir definieren eine Bijektion $\Phi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{M}_n$.

Wir konstruieren $\Phi(L, c) = (M, c')$, indem wir die Zahlen 1 bis n durchgehen.

- Wenn eine Zahl k in L enthalten ist mit $c(k) = (a, b)$, so setzen wir $k \in M$ und definieren $c'(k) = a$.
- Wenn eine Zahl k in L nicht enthalten ist, und $k+1$ ist auch nicht in L enthalten, so gilt $k \notin M$.
- Wenn eine Zahl k in L nicht enthalten ist, $k+1$ in L enthalten ist und $c(k+1) = (a, b)$ mit $b = 0$, dann gilt wieder $k \notin M$.
- Wenn eine Zahl k in L nicht enthalten ist, $k+1$ in L enthalten ist und $c(k+1) = (a, b)$ mit $b \neq 0$, dann setzen wir $k \in M$ mit $c'(k) = b$.

Das Ergebnis liegt sicher in $\mathcal{M}_n$.

Um zu überprüfen, dass das wirklich eine Bijektion ist, definieren wir die Umkehrabbildung Ψ, die aus einem Objekt (M, c') in $\mathcal{M}_n$ ein Objekt (L, c) in $\mathcal{L}_n$ macht.

- Wir gehen die Zahlen von n bis 1 durch. Wenn die Zahl k in M enthalten ist und $k-1$ ist nicht in M enthalten, so ist k in L und $c(k) = (c'(k), 0)$.

- Wenn die Zahl k in M enthalten ist und $k-1$ ist ebenfalls in M enthalten, dann ist k in L und $c(k) = (c'(k), c'(k-1))$ und wir entfernen die Zahl $k-1$ aus der Menge M für den weiteren Ablauf.
- Wenn die Zahl k in M nicht enthalten ist, so ist k in L nicht enthalten.

Das ergibt tatsächlich ein Element in $\mathcal{L}_n$ und es ist leicht zu sehen, dass das die Umkehrabbildung ist, da jeder einzelne Schritt die Umkehrung des Schritts in der anderen Abbildung ist. ■

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Man beweise die folgenden beiden Behauptungen.*

(a) Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form $3^k + 3^n$ mit positiven ganzen Zahlen k und n.

(b) Es gibt keine Quadratzahlen der Form $7^k + 7^n$ mit positiven ganzen Zahlen k und n.

(Walther Janous)

Lösung 1. (a) Wählt man $k = 2\ell$ gerade und $n = k+1$, dann ist

$$3^k + 3^n = 3^{2\ell} + 3^{2\ell+1} = (2 \cdot 3^\ell)^2,$$

also gibt es unendlich viele Lösungen.

(b) Mit $7 \equiv 1 \bmod 3$ erhalten wir $7^k + 7^n \equiv 2 \bmod 3$. Da Quadrate $\bmod 3$ nur die Reste 0 oder 1 haben können, ergibt sich die Behauptung.

(Walther Janous) □

Lösung 1a. Teil (b). Für $k = n$ ergibt sich $7^k + 7^n = 2 \cdot 7^n$. Dies ist sicherlich keine Quadratzahl. Wir können also o. B. d. A. $k < n$ annehmen. Mit

$$z^2 = 7^k(7^{n-k} + 1)$$

ergibt sich, dass k gerade sein muss. Division durch 7^k belässt auf der linken Seite eine Quadratzahl z_1^2. Daraus folgt $z_1^2 - 1 = 7^{n-k}$, also $(z_1 - 1)(z_1 + 1) = 7^{n-k}$. Dies hat aber keine Lösung für z_1. Andernfalls müssten $z_1 - 1 = 7^a$ und $z_1 + 1 = 7^b$ mit $0 \leq a < b$ und damit $7^b - 7^a = 2$ gelten. Es ist aber $7^b - 7^a \geq 7^b - 7^{b-1} = 6 \cdot 7^{b-1} \geq 6$.

(Reinhard Razen) □