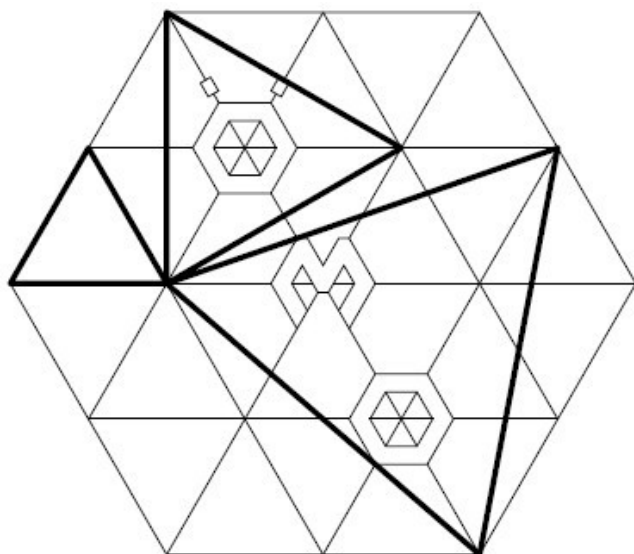




Folgen und Reihen

Theorie & Aufgaben

Bundeswettbewerb Vorrunde

Skript für Ersteilnehmende

Mag. Markus Dorn

1	Grundlagen	2
1.1	Folgen, Funktionen und Mengen	2
1.2	Periodizität	3
1.3	Monotonie und Beschränktheit	5
1.4	Konvergenz und Grenzwert	7
2	Darstellungen von Folgen	10
2.1	Explizite und rekursive Darstellungen	10
2.2	Explizite Darstellungen erraten und durch vollständige Induktion beweisen	11
2.3	Explizite Darstellungen für homogene lineare Rekursionen..	13
2.4	Explizite Darstellungen für inhomogene lineare Rekursionen	17
3	Spezielle Folgen	19
3.1	Arithmetische Folgen	19
3.2	Geometrische Folgen	20
3.3	Harmonische Folgen	21
3.4	Fibonacci-Folge	22
4	Reihen	24
4.1	Einführung	24
4.2	Arithmetische Reihen	25
4.3	Geometrische Reihen	27
4.4	Harmonische Reihen	32

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Folgen, Funktionen und Mengen

Eine Folge ist eine Aneinanderreihung von endlich vielen oder unendlich vielen Zahlen. Dieselbe Zahl kann in einer Folge auch mehrfach auftreten.

Eine Folge bezeichnen wir mit $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ oder mit $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$. Das n -te Element bzw. Glied einer Folge ist a_n , wobei n der Index ist.

ANMERKUNGEN:

- ♠ Statt $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ können wir auch einfach nur $\langle a_n \rangle$ schreiben. Manchmal wird auch die Schreibweise (a_n) verwendet.
- ♠ Ob wir bei 0 oder 1 zu zählen anfangen, also ob wir das erste Folgeelement mit a_0 oder mit a_1 bezeichnen, ist egal. Manchmal hängt es auch von dem jeweiligen Problem ab, welche Zählweise sinnvoller ist.

BEISPIEL 1.1

Ein einfaches Beispiel für eine Folge ist die Folge der Quadratzahlen:

$$\langle 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots \rangle$$

Es gilt:

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16, a_5 = 25, \dots$$

DEFINITION 1.2

Eine Abbildung der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen in die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen nennt man eine *unendliche Folge von reellen Zahlen*. Dabei wird der natürlichen Zahl n die reelle Zahl x_n zugeordnet.

ACHTUNG:

Die Reihenfolge der einzelnen Folgenglieder ist wichtig, im Unterschied zu einer Menge, wo die Anordnung der einzelnen Elemente egal ist.

z.B: Die beiden Mengen $\{7, 5, 3\} = \{3, 5, 7\}$ sind gleich, nicht jedoch die beiden Folgen $\langle 7, 5, 3, \dots \rangle \neq \langle 3, 5, 7, \dots \rangle$.

AUFGABE 1.3

Die positiven ganzen Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ erfüllen die Bedingungen $x_6 = 144$ und $x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$. Bestimmen Sie x_7 .

[Polen Finalrunde 1997, Aufgabe 1]

AUFGABE 1.4

Es sei $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ diejenige Folge reeller Zahlen, für die $a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

gilt. Man ermittle, welche Glieder dieser Folge ganzzahlig sind.

[20. Deutsche Mathematik-Olympiade 1980, Klasse 12, 4. Stufe, Aufgabe 4]

AUFGABE 1.5

Man bestimme die Anzahl der Quadrate natürlicher Zahlen in der Folge $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ mit $a_{n+1} = 10a_n + (-1)^n$ für $n \geq 0$ und $a_3 = 91$.

[22. Österreichische Mathematik-Olympiade 1991, Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene, Aufgabe 3 (Gerd Baron)]

AUFGABE 1.6

Gegeben ist eine Folge $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ natürlicher Zahlen, die der Rekursion

$$a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-3}^2$$

für $n \geq 3$ genügt.

Man zeige: Ist ein $a_k = 1997$, so ist $k \leq 3$.

[28. Österreichische Mathematik-Olympiade 1997, Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene, Aufgabe 4 (Gerd Baron)]

DEFINITION 1.7

Stimmen alle Glieder einer Folge überein, so heißt die Folge *konstante Folge*.

DEFINITION 1.8

Folgen, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, heißen *alternierende Folgen*.

1.2 Periodizität

DEFINITION 1.9

Eine Folge heißt *periodisch*, wenn es eine positive ganze Zahl p derart gibt, dass

$$x_{n+p} = x_n$$

für alle ganzen Zahlen $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt.

BEISPIEL 1.10

Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist definiert durch $a_{n+2} = \frac{1+a_{n+1}}{a_n}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimme den

Wert von a_{2013} .

[Manfrino, Radmila, Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad, Switzerland 2015, Seite 119f.]

Wir bestimmen die ersten Folgenglieder:

$$a_3 = \frac{1+a_2}{a_1}$$

$$a_4 = \frac{1+a_3}{a_2} = \frac{1+\frac{1+a_2}{a_1}}{a_2} = \frac{1+a_1+a_2}{a_1 a_2}$$

$$a_5 = \frac{1+a_4}{a_3} = \frac{1+\frac{1+a_1+a_2}{a_1 a_2}}{\frac{1+a_2}{a_1}} = \frac{a_1 a_2 + 1 + a_1 + a_2}{\frac{1+a_2}{a_1}} = \frac{a_1(1+a_1)(1+a_2)}{a_1 a_2 (1+a_2)} = \frac{1+a_1}{a_2}$$

$$a_6 = \frac{1+a_5}{a_4} = \frac{1+\frac{1+a_1}{a_2}}{\frac{1+a_1+a_2}{a_1 a_2}} = \frac{a_1 a_2 (1+a_1+a_2)}{a_2 (1+a_1+a_2)} = a_1$$

$$a_7 = \frac{1+a_6}{a_5} = \frac{1+a_1}{\frac{1+a_1}{a_2}} = a_2.$$

Die Folge ist also periodisch mit der Periodenlänge 5, d.h. es gilt $a_{n+5} = a_n$ für alle n .

Daher erhalten wir $a_{2013} = a_3 = \frac{1+a_2}{a_1}$.

□

AUFGABE 1.11

Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist definiert durch $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} a_n + 1$ für $n \geq 3$. Welche Folgenglieder sind gerade und welche sind Vielfache von 4?

[Manfrino, Radmila, Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad, Switzerland 2015, Seite 116]

AUFGABE 1.12

Für jede ganze Zahl $a_0 > 1$ sei die Folge $a_0, a_1, a_2, \dots$ gegeben durch

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{falls } \sqrt{a_n} \text{ ganzzahlig,} \\ a_n + 3 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Man bestimme alle Werte von a_0 , so dass es eine Zahl A gibt, mit $a_n = A$ für unendlich viele Werte von n .

[IMO 2017, Aufgabe 1 (Stephan Wagner, Südafrika)]

AUFGABE 1.13

Man bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ existieren, so dass $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ und

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

für $i = 1, 2, \dots, n$ gelten.

[IMO 2018, Aufgabe 2 (Patrik Bak, Slowakei)]

1.3 Monotonie und Beschränktheit

DEFINITION 1.14

Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt

(1) *monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n \leq x_{n+1}$$

(2) *streng monoton wachsend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n < x_{n+1}$$

(3) *monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n \geq x_{n+1}$$

(4) *streng monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n > x_{n+1}$$

BEISPIEL 1.15

Zeige: $\left\langle \frac{3n-1}{n+1} \right\rangle$ ist streng monoton wachsend.

Beweis 1:

Wir müssen zeigen, dass $x_n \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_n \leq x_{n+1}$$

$$\frac{3n-1}{n+1} \leq \frac{3(n+1)-1}{(n+1)+1}$$

$$\frac{3n-1}{n+1} \leq \frac{3n+2}{n+2} \quad \left| \cdot \underbrace{(n+1)}_{>0}; \cdot \underbrace{(n+2)}_{>0} \right.$$

$$(3n-1)(n+2) \leq (3n+2)(n+1)$$

$$3n^2 + 5n - 2 \leq 3n^2 + 5n + 2$$

$$-2 \leq 2 \text{ w.A. für alle } n \in \mathbb{N}$$

□

Beweis 2:

Wir schreiben x_n wie folgt um:

$$x_n = \frac{3n-1}{n+1} = \frac{3n+3-4}{n+1} = \frac{\cancel{3(n+1)}}{\cancel{n+1}} - \frac{4}{n+1} = 3 - \frac{4}{n+1}$$

Da $\frac{4}{n+1}$ streng monoton fallend ist, ist $x_n = 3 - \frac{4}{n+1}$ streng monoton wachsend.

□

AUFGABE 1.16

Man zeige: Die Folge $\left\langle \frac{(n+1)^n n^{2-n}}{7n^2+1} \right\rangle_{n=0,1,2,\dots}$ ist streng monoton wachsend.

[37. Österreichische Mathematik-Olympiade 2006, Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Zwischenwettbewerb, Aufgabe 2 (Gerd Baron)]

DEFINITION 1.17

Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt

(1) *nach unten beschränkt*, wenn es eine Zahl U gibt, sodass alle Folgenglieder x_n größer oder gleich U sind:

$$x_n \geq U$$

U ist eine *untere Schranke*.

(2) *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl O gibt, sodass alle Folgenglieder x_n kleiner oder gleich O sind:

$$x_n \leq O$$

O ist eine *obere Schranke*.

ACHTUNG:

Erfüllt auch nur ein Folgenglied die Eigenschaft nicht, d.h., wenn es ein Folgenglied x_i gibt, sodass $x_i < U$ bzw. $x_i > O$, so ist U keine untere bzw. O keine obere Schranke!

BEISPIEL 1.18

Beweise bzw. widerlege die beiden folgenden Behauptungen!

a) 1 ist eine untere Schranke von $\left\langle \frac{8n+6}{7n-5} \right\rangle$.

b) 2 ist eine obere Schranke von $\left\langle \frac{5n-3}{2n+1} \right\rangle$.

In beiden Fällen führen wir Äquivalenzumformungen durch, um die Behauptung zu beweisen bzw. zu widerlegen:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{8n+6}{7n-5} &\geq 1 \quad | \cdot \underbrace{(7n-5)}_{>0} \\ 8n+6 &\geq 7n-5 \\ n &\geq -11 \end{aligned}$$

Die Menge aller natürlichen Zahlen n , die die Ungleichung $n \geq -11$ erfüllen, ist gerade $\mathbb{N}$. Also ist 1 eine untere Schranke.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{5n-3}{2n+1} &\leq 2 \quad | \cdot \underbrace{(2n+1)}_{>0} \\ 5n-3 &\leq 4n+2 \\ n &\leq 5 \end{aligned}$$

Die Behauptung ist also falsch, da nur die ersten 5 Folgenglieder kleiner oder gleich 2 sind. Also ist 2 keine obere Schranke.

□

DEFINITION 1.19

Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt *beschränkt*, wenn sie sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt ist.

AUFGABE 1.20

Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist definiert durch $0 < a_0 < a_0 + a_1 < 1$ und $a_{n+1} + \frac{a_n - 1}{a_{n-1}} = 0$ für $n \geq 1$.

Zeige, dass diese Folge beschränkt ist.

[Manfrino, Radmila, Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad, Switzerland 2015, Seite 119]

AUFGABE 1.21

Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist definiert durch

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ für } n \geq 3.$$

Beweise, dass $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ für alle n .

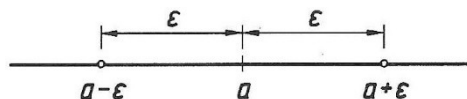
[Kroatien 2009]

1.4 Konvergenz und Grenzwert

Nähert sich eine Folge $\langle a_n \rangle$ einem einzelnen Wert a immer mehr an, so spricht man von Konvergenz. Mit Hilfe des Begriffes der ε -Umgebung können wir diese Näherung mathematisch beschreiben.

DEFINITION 1.22

Unter einer ε -Umgebung $U(a; \varepsilon)$ verstehen wir das offene Intervall $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ mit $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

**BEISPIEL 1.23**

Wir betrachten einige Glieder der Folge $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$:

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$a_3 = \frac{1}{3} = 0,3333\dots$$

$$a_4 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$a_5 = \frac{1}{5} = 0,2$$

$\vdots$

$$a_{2022} = \frac{1}{2022} = 0,0009784735812\dots$$

Wir erkennen, dass sich die Folgenglieder a_n mit wachsendem Index n immer mehr der Zahl 0 annähern. Nun betrachten wir verschiedene ε -Umgebungen um 0:

- ♠ In der ε -Umgebung $U(a=0; \varepsilon_1=1,1)$ liegen alle Glieder der Folge.
- ♠ In der ε -Umgebung $U(a=0; \varepsilon_2=0,18)$ liegen ab dem 6.Glied alle weiteren Folgenglieder, d.h. nur die Folgenglieder a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5 liegen außerhalb dieser ε -Umgebung.

Egal, wie klein wir die ε -Umgebung wählen, stets liegen unendlich viele Folgenglieder innerhalb dieser Umgebung und nur endlich viele Folgenglieder außerhalb dieser Umgebung. Diese Beobachtung führt uns nun zum Grenzwert-Begriff.

DEFINITION 1.24

Eine reelle Zahl a heißt *Grenzwert der Folge* $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε -Umgebung $U(a; \varepsilon)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ fast alle Glieder der Folge liegen. Es gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Anders ausgedrückt:

Die Folge $\langle a_n \rangle$ strebt mit wachsendem n dem Grenzwert (Limes) a zu. Wir schreiben: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

ANMERKUNGEN:

- ♠ Eine Folge kann maximal einen Grenzwert besitzen. Die alternierende Folge $\langle 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots \rangle$ etwa besitzt keinen Grenzwert. Wählen wir um 1 eine ε -Umgebung von $\frac{1}{2}$, so liegen zwar unendlich viele Folgenglieder innerhalb dieser Umgebung, aber auch unendlich viele Folgenglieder außerhalb dieser Umgebung.
- ♠ Der Ausdruck $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ bedeutet nicht, dass a tatsächlich erreicht werden muss, sondern nur, dass in jeder noch so kleinen ε -Umgebung um a fast alle Folgenglieder liegen.

BEMERKUNG:

Eine Folge ist konvergent, wenn sie monoton steigend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt ist.

AUFGABE 1.25

Man beweise, dass die Folge $\left\langle 0, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2+3 \cdot \sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2+3 \cdot \sqrt[3]{2+3 \cdot \sqrt[3]{2}}}, \dots \right\rangle$ konvergiert.

[4. Österreichische Mathematik-Olympiade 1973, Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene, Aufgabe 4 (Gerd Baron)]

DEFINITION 1.26

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt *konvergent*. Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt *divergent*.

BEISPIEL 1.27

Wir beweisen nun, dass die Folge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ den Grenzwert 0 besitzt:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt diese Ungleichung für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist 0 der Grenzwert dieser Folge und wir können $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ schreiben.

□

DEFINITION 1.28

Eine Folge heißt Nullfolge, wenn in jeder ε -Umgebung von 0 fast alle Folgenglieder liegen. Der Grenzwert jeder Nullfolge ist also 0.

Es gilt: $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir schreiben: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Kapitel 2

Darstellungen von Folgen

2.1 Explizite und rekursive Darstellungen

Um eine Folge zu definieren, müssen wir eine Zuordnungsvorschrift angeben, die den einzelnen Indizes die Folgenglieder zuweist. Diese Zuordnungsvorschrift wird *Bildungsgesetz* der Folge genannt.

Wir unterscheiden zwischen einer expliziten und einer rekursiven Darstellung:

- ♠ Bei einer *expliziten Bildungsvorschrift* geben wir einen vom Index der Folge abhängigen Funktionsterm an, mit dem wir jedes beliebige Folgenglied ausrechnen können ohne andere Folgenglieder kennen zu müssen.
- ♠ Eine *Rekursion* ist eine Formel, die jedes a_n mithilfe von $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ und n ausdrückt. Zur Berechnung einzelner Folgenglieder müssen wir die Vorgänger dieser Folgenglieder kennen. Bei einer rekursiven Darstellung müssen wir somit sowohl die Rekursionsvorschrift als auch das erste Folgenglied (bzw. die ersten Folgenglieder) angeben.

BEISPIEL 2.1 Folge der ungeraden natürlichen Zahlen

Die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen können wir sowohl explizit als auch rekursiv angeben:

- ♠ explizite Darstellung: $x_n = 2n - 1$ für alle $n \geq 1$
- ♠ rekursive Darstellung: $x_{n+1} = x_n + 2, x_1 = 1$

ANMERKUNGEN

- ♠ Explizite Bildungsgesetze sind oft schwieriger anzugeben als rekursive Darstellungen. Dafür können wir mit expliziten Bildungsgesetzen jedes beliebige Folgenglied direkt ausrechnen ohne alle vorhergehenden Folgenglieder bestimmen zu müssen.
- ♠ Nicht jede Folge lässt sich durch ein explizites oder ein rekursives Bildungsgesetz beschreiben. Für die Folge der Primzahlen $\langle p_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} = \langle 2, 3, 5, 7, 11, \dots \rangle$ etwa kennt man bis heute weder eine explizite noch eine rekursive Darstellung.

VORGANGSWEISE BEIM FINDEN EINES EXPLIZITEN ODER REKURSIVEN BILDUNGSGESETZES:

- 1) Zunächst müssen wir eine Gesetzmäßigkeit erkennen, durch die die Folgenglieder definiert sind. Dazu sollten wir einmal ein paar Folgenglieder ausrechnen und uns danach die Frage stellen, ob wir irgendein Muster erkennen.
- 2) Nun müssen wir noch versuchen das gefundene Muster durch eine mathematische Funktion zu beschreiben. Bei einer expliziten Darstellung suchen wir eine Funktion der Form $n \mapsto a_n$, bei einer rekursiven Darstellung muss das Bildungsgesetz die Form $(a_n, n) \mapsto a_{n+1}$ haben. Anschließend müssen wir noch unsere Vermutung beweisen.

2.2 Explizite Darstellungen erraten und durch vollständige Induktion beweisen

Oft kennen wir eine rekursive Darstellung und suchen eine explizite Darstellung. Wenn man die explizite Darstellung errät, dann muss man anschließend noch durch vollständige Induktion beweisen, dass diese Darstellung tatsächlich für alle n gilt.

BEISPIEL 2.2

Wir wollen eine explizite Darstellung für die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ und dem Startwert $a_1 = 1$ finden.

[Drmota, Michael, Beispiele für Folgen und Reihen für Erstteilnehmende Raach. Vortragsfolien (Online-Kursleiterseminar Mariazell 2021), downloadbar unter <https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/757> (11.04.2022)]

Wir bestimmen zunächst einmal die ersten Folgenglieder:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 2 \cdot 2 - 1 = 4$$

$$a_3 = 4 + 2 \cdot 3 - 1 = 9$$

$$a_4 = 9 + 2 \cdot 4 - 1 = 16$$

$$a_5 = 16 + 2 \cdot 5 - 1 = 25$$

Wir vermuten, dass dies die Folge der Quadratzahlen ist, d.h. $a_n = n^2$. Dies können wir durch vollständige Induktion beweisen:

♠ Induktionsanfang: $a_1 = 1 = 1^2$

♠ Induktionsvoraussetzung: $a_{n-1} = (n-1)^2$

♠ Induktionsschritt: $n-1 \rightarrow n$

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \stackrel{\text{I.V.}}{=} (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$$

□

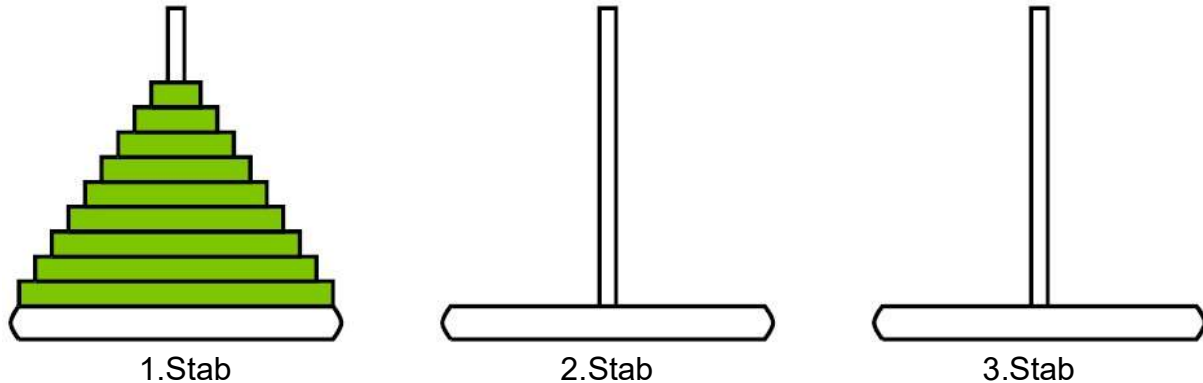
AUFGABE 2.3

Finde eine explizite Darstellung für die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot (a_n - 1)$ und dem Startwert $a_1 = 3$.

[Drmota, Michael, Beispiele für Folgen und Reihen für Erstteilnehmende Raach. Vortragsfolien (Online-Kursleiterseminar Mariazell 2021), downloadbar unter <https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/757> (11.04.2022)]

AUFGABE 2.4 Die Türme von Hanoi

Eine schöne Legende über die Erschaffung der Welt erzählt uns, dass Brahma auf der Erde drei diamantene Stäbe und 64 goldene Scheiben platziert hat. Die Scheiben waren alle unterschiedlich groß. Zu Beginn befanden sich alle Scheiben auf dem ersten Stab, wobei die Durchmesser von der Basis bis zur Spitze hin immer kleiner wurden.



Brahma erschuf auch ein Kloster, wo Mönche die Aufgabe hatten alle Scheiben vom ersten Stab zum dritten Stab zu bewegen. Eine Scheibe durfte von einem Stab zu irgend einem anderen Stab bewegt werden, wobei eine Scheibe mit einem größeren Durchmesser niemals auf eine kleinere Scheibe gelegt werden durfte.

Laut der Legende würde die Welt enden, wenn die Mönche ihre Aufgabe erfüllt hätten. Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Zügen, die die Mönche ausführen müssten um diese Aufgabe zu bewältigen?

[Manfrino, Radmila, Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad, Switzerland 2015, Seite 44f.]

AUFGABE 2.5

Wie viele Teilmengen hat die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$?

Hinweis: Wir zählen immer die leere Menge $\emptyset$ und die Gesamtmenge $\{1, 2, \dots, n\}$ mit.

So hat etwa die Menge $\{1, 2\}$ die vier Teilmengen $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$.

[Grieser, Daniel, Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik, Wiesbaden 2017, Seite 32ff.]

AUFGABE 2.6

Es sei $A_0 = \{1, 2\}$ und für $n > 0$ entsteht A_n aus A_{n-1} indem man zu A_{n-1} die natürlichen Zahlen hinzu nimmt, die sich als Summe von zwei verschiedenen Zahlen aus A_{n-1} darstellen lassen.

Es sei $a_n = |A_n|$ die Anzahl der Zahlen in A_n .

Man bestimme a_n als Funktion von n .

[32. Österreichische Mathematik-Olympiade 2001, Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene, Aufgabe 4 (Gerd Baron)]

2.3 Explizite Darstellungen für homogene lineare Rekursionen

DEFINITION 2.7

Wir bezeichnen eine Rekursionsgleichung als *lineare Rekursion*, wenn sie die Form

$$a_{n+1} = a_n \cdot c_0 + a_{n-1} \cdot c_1 + a_{n-2} \cdot c_2 + \dots + a_{n-m} \cdot c_m + s(n)$$

hat mit Konstanten c_i für $i = 0, 1, \dots, m$ und mit $c_m \neq 0$.

Gilt $s(n) = 0$, so nennen wir die Rekursion *homogen*, sonst inhomogen.

Die Ordnung der linearen Rekursion ist $m + 1$.

BEMERKUNG:

Die Ordnung einer (linearen) Rekursion ist also die Differenz zwischen i und j , wobei a_i das Folgenglied mit dem größten Index und a_j das Folgenglied mit dem kleinsten Index ist.

BEISPIEL 2.8 Bsp. für Rekursionsgleichungen

♠ $a_n + 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2} = 0$ ist eine homogene lineare Rekursion der Ordnung 2.

♠ $a_n + 4 \cdot a_{n-2} = n!$ ist eine inhomogene lineare Rekursion der Ordnung 2.

♠ $a_n^2 + 2 \cdot a_n \cdot a_{n-1} + a_{n-1}^2 = 0$ ist eine homogene nichtlineare Rekursion der Ordnung 1.

BEISPIEL 2.9 explizite Darstellung der Fibonacci-Rekursion

Wir wollen nun eine explizite Darstellung für die Rekursion

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (\text{R})$$

und den Anfangsbedingungen

$$a_0 = a_1 = 1 \quad (\text{AB})$$

herleiten. Diese Rekursion stellt die sogenannte Fibonacci-Folge dar und wird in Kap. 3.4 noch ausführlicher besprochen werden.

[Grieser, Daniel, Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik, Wiesbaden 2017, Seite 42ff.]

Wir berechnen zunächst einige Folgenglieder:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Leider schaffen wir es nicht, eine explizite Darstellung zu erraten, da die üblichen Versuche wie $n, n^2, 2^n, n!$ oder Kombinationen von diesen uns hier nicht ans Ziel bringen.

Exemplarisch versuchen wir es etwa mit $a_n = n^2$: Aus $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ folgt $n^2 = (n-1)^2 + (n-2)^2$ bzw. $n^2 - 6n + 5 = 0$. Dies ist eine quadratische Gleichung in n und kann daher nur für höchstens zwei Werte von n stimmen (hier: $n = 1$ oder $n = 5$.), also nicht für alle n ! Also ist dieser Versuch fehlgeschlagen.

Wir versuchen es daher nun mit einer Exponentialfunktion mit unbekannter Basis α :

Ansatz: $a_n = \alpha^n$ für eine reelle Zahl $\alpha \neq 0$.

Wir setzen dies nun in die Rekursion (R) ein und erhalten:

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} \quad | : \alpha^{n-2}$$

$$\alpha^2 = \alpha + 1.$$

Unser Ansatz $a_n = \alpha^n$ erfüllt also die Rekursion für alle n genau dann, wenn α eine Lösung der $\alpha^2 = \alpha + 1$ ist. Diese Gleichung besitzt die beiden Lösungen

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Wir führen nun für die beiden Lösungen die Bezeichnungen

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ein und benennen die dazugehörigen Folgen mit b_n und c_n statt mit a_n . Das rekursive Bildungsgesetz der Fibonacci-Zahlen (R) wird durch

$$\beta^0, \beta^1, \beta^2, \dots$$

$$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \dots$$

erfüllt. So gilt beispielsweise

$$\beta^2 = \beta^1 + \beta^0 = 2,618033989\dots$$

$$\gamma^3 = \gamma^2 + \gamma^1 = -0,2360679775\dots$$

Wir haben also jetzt zwei Lösungen für die Rekursion gefunden, nämlich

$$b_n = \beta^n \quad \text{und} \quad c_n = \gamma^n.$$

Leider erfüllen diese beiden Lösungen nur die Anfangsbedingung $a_0 = \beta^0 = \gamma^0 = 1$, nicht aber die Anfangsbedingung $a_1 = 1$. Daher brauchen wir eine weitere Idee. Wir überlegen uns nun, wie wir aus unseren beiden Lösungen weitere Lösungen erhalten können.

Die beiden folgenden Möglichkeiten sind naheliegend:

- ♣ Wir könnten eine Lösung mit einer Konstante multiplizieren: Ist $b_0, b_1, \dots$ eine Lösung von (R) und B eine beliebige reelle Zahl, so ist auch $B \cdot b_0, B \cdot b_1, \dots$ eine Lösung von (R), denn

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \Rightarrow B \cdot b_n = B \cdot b_{n-1} + B \cdot b_{n-2} \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

- ♣ Wir könnten Lösungen addieren: Sind $b_0, b_1, \dots$ und $c_0, c_1, \dots$ Lösungen von (R), so ist auch $d_0, d_1, \dots$ mit $d_n = b_n + c_n$ eine Lösung, denn

$$\begin{array}{rcl} b_n & = & b_{n-1} + b_{n-2} \\ c_n & = & c_{n-1} + c_{n-2} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} b_n & = & b_{n-1} + b_{n-2} \\ c_n & = & c_{n-1} + c_{n-2} \end{array}} \right\} +$$

$$\underbrace{b_n + c_n}_{d_n} = \underbrace{b_{n-1} + c_{n-1}}_{d_{n-1}} + \underbrace{b_{n-2} + c_{n-2}}_{d_{n-2}} \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Diese beiden Möglichkeiten können wir auch kombinieren: Sind $b_0, b_1, \dots$ und $c_0, c_1, \dots$ Lösungen von (R) und sind B, C beliebige reelle Zahlen, so ist auch $a_0, a_1, \dots$ mit

$$a_n = B \cdot b_n + C \cdot c_n \quad \text{für alle } n$$

eine Lösung von (R).

Wir wollen nun die Zahlen B und C so bestimmen, dass diese a_n auch die beiden Anfangsbedingungen (AB) erfüllen. Daher schreiben wir die Gleichung $a_n = B \cdot b_n + C \cdot c_n$ für $n = 0$ und $n = 1$ an:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= B \cdot b_0 + C \cdot c_0 \\ a_1 &= B \cdot b_1 + C \cdot c_1 \end{aligned} \right\}$$

Somit gilt

$$\left. \begin{aligned} 1 &= B + C \\ 1 &= B \cdot \beta + C \cdot \gamma \end{aligned} \right\} \cdot \beta \Bigg] -$$

$$\beta - 1 = C \cdot (\beta - \gamma) \Rightarrow C = \frac{\beta - 1}{\beta - \gamma} \text{ und } B = -\frac{\gamma - 1}{\beta - \gamma}.$$

Indem wir die Werte von B , C und b_n, c_n in die Formel $a_n = B \cdot b_n + C \cdot c_n$ einsetzen, erhalten wir

$$a_n = -\frac{\gamma - 1}{\beta - \gamma} \beta^n + \frac{\beta - 1}{\beta - \gamma} \gamma^n.$$

Aus $\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ und $\gamma = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ folgt

$$\beta - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = -\gamma,$$

$$\gamma - 1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\beta,$$

$$\beta - \gamma = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

und somit

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

Das ist also die explizite Darstellung der Fibonacci-Folge.

□

VORGANGSWEISE UM HOMOGENE LINEARE REKURSIONEN EXPLIZIT DARZUSTELLEN:

- 1) Wir ersetzen jedes a_n durch q^n (und entsprechend $a_{n \pm k}$ durch $q^{n \pm k}$). Die entstehende Gleichung ist die *charakteristische Gleichung der Rekursion*.
- 2) Wir dividieren diese charakteristische Gleichung durch q^{n-m} , da $n-m$ die kleinste vorkommende Potenz von q ist.
- 3) Diese Gleichung lösen wir nun nach q auf. Die Lösungen dieser Gleichung seien $q_1, q_2, \dots, q_l$.
- 4) Nun verwenden wir den folgenden Ansatz: $a_n = B_1 \cdot q_1^n + B_2 \cdot q_2^n + \dots + B_l \cdot q_l^n$. In diesen Ansatz setzen wir die Anfangsbedingungen ein und rechnen uns die B_i aus.

BEMERKUNG:

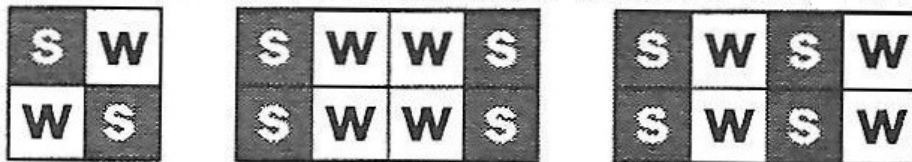
Die soeben geschilderte Vorgangsweise funktioniert nur, wenn die Lösungen der charakteristischen Gleichung unterschiedlich sind. Falls gleiche Lösungen auftreten, so müssen wir in Punkt 4) den folgenden Ansatz wählen:

$$\begin{aligned}
 a_n = & B_{1,1} \cdot q_1^n + B_{1,2} \cdot n \cdot q_1^n + \dots + B_{1,v_1} \cdot n^{v_1-1} \cdot q_1^n + \\
 & + B_{2,1} \cdot q_2^n + B_{2,2} \cdot n \cdot q_2^n + \dots + B_{2,v_2} \cdot n^{v_2-1} \cdot q_2^n + \\
 & \vdots \\
 & + B_{l,1} \cdot q_l^n + B_{l,2} \cdot n \cdot q_l^n + \dots + B_{l,v_l} \cdot n^{v_l-1} \cdot q_l^n
 \end{aligned}$$

Dabei treten die Lösungen $q_1, q_2, \dots, q_l$ mit den Vielfachheiten $v_1, v_2, \dots, v_l$ auf; Statt $B_{i,j}$ setzt man normalerweise Großbuchstaben in alphabetischer Reihenfolge ein.

AUFGABE 2.10

Gegeben sind folgende schwarz-weiß bemalte Steine in genügender Anzahl:

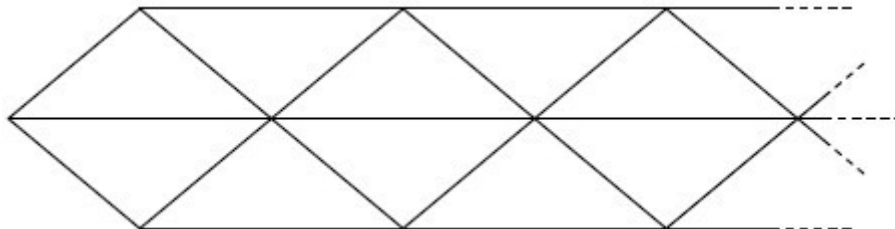


Mit wieviel verschiedenen schwarz-weiß-Mustern kann ein $2 \times n$ – Rechteck mit diesen Steinen ausgelegt werden?

[27. Österreichische Mathematik-Olympiade 1996, Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Aufgabe 2 (Gerd Baron)]

AUFGABE 2.11

In einem Straßennetz, dessen Anfang gezeichnet ist, sind die Punkte in der mittleren Horizontalen der Reihe nach mit 1, 4, 7, ... bezeichnet. Die oberen Punkte der Reihe nach mit 2, 5, 8, ... und die unteren der Reihe nach mit 3, 6, 9, ...



Wie viele Wege von „1“ nach „ $3n+1$ “ gibt es, die Punkte nur in monoton wachsender Reihenfolge besuchen?

[33. Österreichische Mathematik-Olympiade 2002, Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Aufgabe 5 (Gerd Baron)]

AUFGABE 2.12

Wir betrachten die zwei Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ ganzer Zahlen, die durch $a_0 = b_0 = 2$ und $a_1 = b_1 = 14$ und durch

$$a_n = 14a_{n-1} + a_{n-2},$$

$$b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2}$$

für $n \geq 2$ festgelegt sind.

Man entscheide, ob es unendlich viele Zahlen gibt, die in beiden Folgen vorkommen.

[50. Österreichische Mathematik-Olympiade 2019, Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Vorrunde, Aufgabe 1 (Gerhard Woeginger)]

2.4 Explizite Darstellungen für inhomogene lineare Rekursionen

Abschließend betrachten wir noch kurz inhomogene lineare Rekursionen, die im Allgemeinen deutlich schwerer explizit darzustellen sind. Wir beschränken uns auf Rekursionen, wo der inhomogene Term (der Störterm) von der Form

$$s(n) = (s_0 + s_1 \cdot n + s_2 \cdot n^2 + \dots + s_r \cdot n^r) \cdot \alpha^n$$

ist mit Konstanten s_i für alle i .

VORGANGSWEISE UM INHOMOGENE LINEARE REKURSIONEN EXPLIZIT DARZUSTELLEN:

- 1) Zunächst lassen wir den Störterm weg und lösen die Rekursion für die Gleichung ohne Störterm so wie wir es in den Schritten 1) bis 3) bei homogenen linearen Rekursionen getan haben.
- 2) Nun bestimmen wir eine sogenannte partikuläre Lösung. Das ist eine Folge, die die Rekursionsgleichung erfüllt, aber die nicht unbedingt die richtigen Startwerte hat. Dazu verwenden wir den folgenden Ansatz:

$$p_n = (t_0 + t_1 \cdot n + t_2 \cdot n^2 + \dots + t_r \cdot n^r) \cdot n^v \cdot \alpha^n,$$

wobei v die Vielfachheit von α als Nullstelle der gerade gelösten homogenen Gleichung ist. Diesen Ansatz setzen wir in die Rekursionsgleichung ein und berechnen die Werte $t_0, t_1, \dots, t_r$.

- 3) Die Lösung der Rekursion erhalten wir nun als Addition von partikulärer Lösung und Ansatz der homogenen Lösung, wodurch wir so wie bei homogenen linearen Rekursionen die Koeffizienten bestimmen können.

BEISPIEL 2.13

Man finde eine explizite Darstellung für die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - a_{n-1} + n$ mit den Startwerten $a_0 = 3$ und $a_1 = 5$

[Schmidt, Birgit Vera, Folgen und Reihen. Vorbereitungskurs Raach 2013, Seite 20f., downloadbar unter <https://www.oemo.at/OeMO/Downloads/datei/67> (12.04.2022)]

- 1) Die Gleichung ohne Störterm lautet

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n - a_{n-1}.$$

Die dazugehörige charakteristische Gleichung ist

$$q^{n+1} = 2 \cdot q^n - q^{n-1}.$$

Nach Division durch q^{n-1} erhalten wir

$$q^2 = 2 \cdot q - 1.$$

Dies ist äquivalent zu

$$q^2 - 2 \cdot q + 1 = (q - 1)^2 = 0.$$

Wir erhalten daher die Doppellösung

$$q_{1,2} = 1$$

und somit die homogene Lösung

$$h_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n = A + B \cdot n.$$

2) Der Störterm lautet

$$\underbrace{s(n)}_{(s_0 + s_1 \cdot n + s_2 \cdot n^2 + \dots + s_r \cdot n^r) \cdot \alpha^n} = n = (0 + 1 \cdot n) \cdot 1^n,$$

also gilt $\alpha = 1$. Da dies eine doppelte Nullstelle der homogenen Lösung ist, verwenden wir den Ansatz

$$p_n = \left(\underbrace{C}_{=t_1} \cdot n + \underbrace{D}_{=t_0} \right) \cdot n^2 \cdot 1^n = (C \cdot n + D) \cdot n^2.$$

Setzen wir dies in die Rekursionsgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (C \cdot (n+1) + D) \cdot (n+1)^2 &= 2 \cdot (C \cdot n + D) \cdot n^2 - (C \cdot (n-1) + D) \cdot (n-1)^2 + n \\ Cn^3 + 3Cn^2 + 3Cn + C + Dn^2 + 2Dn + D &= Cn^3 + 3Cn^2 - 3Cn + C + Dn^2 + 2Dn - D + n \\ 3Cn + D &= -3Cn - D + n \\ (6C - 1)n + 2D &= 0. \end{aligned}$$

Wir setzen nun beliebige Werte für n ein (z.B. 0 und 1) um C und D zu bestimmen:

$$n = 0: 2D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$n = 1: 6C - 1 = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{6}$$

Die partikuläre Lösung lautet also

$$p_n = \frac{1}{6} \cdot n^3.$$

3) Dies führt uns zu folgendem Ansatz für die allgemeine Lösung:

$$a_n = h_n + p_n = A + B \cdot n + \frac{1}{6} \cdot n^3.$$

Nun setzen wir noch die Startwerte $a_0 = 3$ und $a_1 = 5$ ein um A und B zu bestimmen:

$$a_0 = 3 = A + B \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 0^3 \Rightarrow A = 3$$

$$a_1 = 5 = 3 + B \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1^3 \Rightarrow B = \frac{11}{6}$$

Somit lautet die explizite Form der Rekursionsgleichung

$$a_n = 3 + \frac{11}{6} \cdot n + \frac{1}{6} \cdot n^3.$$

□

BEMERKUNG:

Bei mehr als einem Störterm kann man diese auch getrennt betrachten und dann alle partikulären Lösungen zur homogenen Lösung addieren.

AUFGABE 2.14

Josef hat auf einem Konto 100 Euro. Jedes Jahr bekommt er 4% Guthabenzinsen und zahlt 3 Euro Kontoverwaltungsgebühr. Wieviel Geld besitzt er nach 10 Jahren?

[Schmidt, Birgit Vera, Folgen und Reihen. Vorbereitungskurs Raach 2013, Seite 42, Aufgabe 28, downloadbar unter <https://www.oemo.at/OeMO/Downloads/datei/67> (12.04.2022)]

Kapitel 3

Spezielle Folgen

3.1 Arithmetische Folgen

DEFINITION 3.1

Eine Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ heißt *arithmetische Folge*, wenn die Differenz d je zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, d.h. für jedes n gilt

$$a_{n+1} - a_n = d$$

BEISPIEL 3.2 Beispiel für eine arithmetische Folge

Die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen $\langle 1, 3, 5, 7, \dots \rangle$ ist eine arithmetische Folge mit dem Startwert 1 und der Differenz 2 zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern.

AUFGABE 3.3

Zeige: Sei $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge mit der rekursiven Darstellung $a_{n+1} = a_n + d$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$a_n = a_0 + n \cdot d \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

die explizite Darstellung dieser Folge.

AUFGABE 3.4

Eine Folge ist eine arithmetische Folge dann und nur dann, wenn jedes Folgenglied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarn ist.

[Schmidt, Birgit Vera, Folgen und Reihen. Vorbereitungskurs Raach 2013, Seite 7, downloadbar unter <https://www.oemo.at/OeMO/Downloads/datei/67> (12.04.2022)]

AUFGABE 3.5

Beweise: Wenn $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge ist mit $a_j \neq 0$ für jedes $j = 0, 1, 2, \dots$, dann gilt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_j \cdot a_{j+1}} = \frac{n}{a_0 \cdot a_n}.$$

[Manfrino, Radmila, Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad, Switzerland 2015, Seite 34]

AUFGABE 3.6

Beweise, dass es fünf Primzahlen gibt, die eine arithmetische Folge bilden, wobei die Differenz zweier Primzahlen 6 ist.

[Manfrino, Radmila, Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad, Switzerland 2015, Seite 35]

3.2 Geometrische Folgen

DEFINITION 3.7

Eine Zahlenfolge $\langle b_n \rangle$ heißt *geometrische Folge*, wenn der Quotient q je zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, d.h. für jedes n gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

BEISPIEL 3.8 *Beispiel für eine geometrische Folge*

Die Folge der Zweierpotenzen $\langle 1, 2, 4, 8, \dots \rangle$ ist eine geometrische Folge mit dem Startwert 1. Der Quotient zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Gliedern ist immer 2.

AUFGABE 3.9

Gibt es eine Folge, die zugleich eine arithmetische Folge als auch eine geometrische Folge ist? Falls ja, dann gib ein Beispiel für eine derartige Folge an! Falls nein, dann beweise dies!

AUFGABE 3.10

Zeige: Sei $\langle b_n \rangle$ eine geometrische Folge mit der rekursiven Darstellung $b_{n+1} = b_n \cdot q$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$b_n = b_0 \cdot q^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

die explizite Darstellung dieser Folge.

AUFGABE 3.11

Eine Folge ist eine geometrische Folge dann und nur dann, wenn jedes Folgenglied das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarn ist.

[Schmidt, Birgit Vera, Folgen und Reihen. Vorbereitungskurs Raach 2013, Seite 9f., downloadbar unter <https://www.oemo.at/OeMO/Downloads/datei/67> (12.04.2022)]

AUFGABE 3.12

Finde eine geometrische Folge $\langle a_n \rangle$, die die Rekursion $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für alle $n \geq 0$ erfüllt.

[Manfrino, Radmila, Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad, Switzerland 2015, Seite 37]

AUFGABE 3.13

Man bestimme alle geometrischen Folgen $b_n = b_0 \cdot q^n, (n \geq 0)$, die gleichzeitig die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) b, q sind positive ganze Zahlen.

(b) Es gibt ein $b_n = 94$.

(c) Es gibt unendlich viele b_n , die vierte Potenzen ganzer Zahlen sind.

(d) q ist durch keine vierte Potenz einer natürlichen Zahl größer als 1 teilbar.

[25. Österreichische Mathematik-Olympiade 1994, Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene, Aufgabe 4 (Gerd Baron)]

3.3 Harmonische Folgen

Wie wir bereits gesehen, ist in einer arithmetischen Folge jedes Folgenglied das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarn und in einer geometrischen Folge ist jedes Folgenglied das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarn. Entsprechend definieren wir nun auch harmonische Folgen.

DEFINITION 3.14

Eine *harmonische Folge* ist eine Folge, in der jedes Folgenglied das harmonische Mittel seiner beiden Nachbarn ist.

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}$$

BEISPIEL 3.15

Die einfachste harmonische Folge ist definiert durch $h_n = \frac{1}{n}$

AUFGABE 3.16

Man zeige: Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist eine harmonische Folge dann und nur dann, wenn $\left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle$ eine arithmetische Folge ist.

[Schmidt, Birgit Vera, Folgen und Reihen. Vorbereitungskurs Raach 2013, Seite 11, downloadbar unter <https://www.oemo.at/OeMO/Downloads/datei/67> (12.04.2022)]

AUFGABE 3.17

Beweise: Wenn $a < b < c$ reelle Zahlen einer harmonischen Folge sind, dann gilt

$$\frac{1}{b-c} + \frac{4}{c-a} + \frac{1}{a-b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a}.$$

[Manfrino, Radmila, Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad, Switzerland 2015, Seite 35]

AUFGABE 3.18

Beweise: Wenn a, b, c und d Glieder einer harmonischen Folge sind, dann gilt

$$a + d > b + c.$$

[Manfrino, Radmila, Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad, Switzerland 2015, Seite 35]

3.4 Fibonacci-Folge

BEISPIEL 3.19 Kaninchenvermehrung

1202 formulierte Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, folgendes Problem:

Ein neugeborenes Kaninchenpaar gilt nach einem Monat als junges Kaninchenpaar. Ab dem 2. Monat ist es ein erwachsenes Kaninchenpaar und wirft vom zweiten Monat an in jedem Monat genau ein neugeborenes Kaninchenpaar. Dieses und alle Nachkommen verhalten sich genauso. Wie viele Kaninchenpaare gibt es nach einem Jahr, wenn kein Kaninchen stirbt?

Monat	erwachsene Paare	junge Paare	neugeborene Paare	Paare insgesamt
0 (Beginn)	0	0	1	1
1	0	1	0	1
2	1	0	1	2
3	1	1	1	3
4	2	1	2	5
5	3	2	3	8
6	5	3	5	13
7	8	5	8	21
8	13	8	13	34
9	21	13	21	55
10	34	21	34	89
11	55	34	55	144
12	89	55	89	233

DEFINITION 3.20

Die Fibonacci-Folge ist definiert durch das rekursive Bildungsgesetz

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

mit den Anfangswerten

$$F_0 = F_1 = 1.$$

ANMERKUNGEN:

- ♠ Wie wir bereits wissen (siehe Kap. 2.3) lautet das explizite Bildungsgesetz der Fibonacci-Folge

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

- ♠ Oft geht man auch von den Anfangswerten $F_1 = F_2 = 1$. aus. Das explizite Bildungsgesetz lautet dann

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

AUFGABE 3.21

Man zeige: Aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind teilerfremd.

AUFGABE 3.22

Beweise: Die Summe der Quadrate von k aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen ergibt das Produkt der n -ten Fibonaccizahlen und deren Nachfolger.

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

[Schmidt, Birgit Vera, Folgen und Reihen. Vorbereitungskurs Raach 2013, Seite 13f., downloadbar unter <https://www.oemo.at/OeMO/Downloads/datei/67> (12.04.2022)]

AUFGABE 3.23

Auf wie viele Arten kann man ein Rechteck der Größe $2 \times n$ mit Dominosteinen der Größe 1×2 und 2×1 pflastern?

[Grieser, Daniel, Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik, Wiesbaden 2017, Seite 38ff.]

AUFGABE 3.24

Jeder Baustein hat 5 nebeneinander liegende Löcher. In diese können entweder Stifte in jeweils genau ein Loch oder Klammern in genau zwei benachbarte Löcher gesetzt werden. Kein Loch darf frei bleiben.

In einer Linie werden n solche besetzte Bausteine aufgelegt, um Muster zu erzeugen, die keine zwei Klammern und auch keine drei Stifte nebeneinander haben.

Wie viele verschiedene solche Muster aus n Bausteinen gibt es?

[42. Österreichische Mathematik-Olympiade 2011, Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Aufgabe 1 (Gerd Baron)]

AUFGABE 3.25

Wir ordnen die positiven ganzen Zahlen wie folgt in zwei Zeilen an:

1	3	6	11	19	32	53	...			
2	4	5	7	8	9	10	12 bis 18	20 bis 31	33 bis 52	54 ...

Zunächst schreiben wir 1 in die obere Zeile, 2 in die untere und 3 wieder in die obere. Danach werden die weiteren Zahlen in der oberen Zeile immer einzeln, in der unteren Zeile in Blöcken angeschrieben, wobei jeweils die erste Zahl aus einem unteren Block bestimmt, wie viele (aufeinanderfolgende) Zahlen der nächste untere Block enthält.

Wir bezeichnen die Zahlen in der oberen Zeile der Reihe nach mit $a_1, a_2, a_3, \dots$

Man gebe eine explizite Formel für a_n an.

[44. Österreichische Mathematik-Olympiade 2013, Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene Teil 1, Aufgabe 3 (Gerd Baron)]

Kapitel 4

Reihen

4.1 Einführung

BEISPIEL 4.1 Computerfachhändler

Ein Computerfachhändler verkauft in einem Jahr PCs einer bestimmten Marke:

Monate	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
verkaufte PCs	3	5	8	12	10	4	3	2	7	10	11	15

Um den Lagerbestand zu ergänzen, ist für den Händler nicht nur die Verkaufszahl pro Monat interessant, sondern auch die Anzahl der verkauften Geräte vom Jahresanfang gerechnet bis zu den einzelnen Monatsenden:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$$

Monate	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
s_n	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}
Summe der verkauften PCs	3	8	16	28	38	42	45	47	54	64	75	90

In diesem Beispiel wurde der Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12} \rangle$ der verkauften Stück pro Monat die Folge $\langle s_1, s_2, s_3, \dots, s_{12} \rangle$ der Summe der verkauften Geräte vom Jahresanfang bis zum jeweiligen Monatsende zugeordnet.

$s_1, s_2, s_3, \dots, s_{12}$ bezeichnet man als Partialsummen (Teilsummen), die Folge $\langle s_1, s_2, s_3, \dots, s_{12} \rangle$ als Reihe.

[Thorwartl, Mathematik positiv 6.Klasse AHS. Band 1: Musterbeispiele und Aufgaben, Wien 1994]

DEFINITION 4.2

Als *endliche Zahlenreihe* bezeichnet man die Folge der Partialsummen $\langle s_1, s_2, s_3, \dots, s_n \rangle$, die der Folge $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ zugeordnet ist.

ANMERKUNG: Summenschreibweise

Normalerweise verwenden wir bei Summen die folgende Kurzschreibweise

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Sprich: „ s_n ist die Summe aller a_i von i gleich 1 bis n “

Σ ... griechischer Buchstabe (Sigma) ist das mathematische Symbol für eine Summe

a_i ... steht für die zu summierenden Glieder

AUFGABE 4.3

Gib die folgenden Summen in Kurzschreibweise an!

a) Summe von ungeraden Zahlen: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

b) Summe von Quadratzahlen: $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Binomischer Lehrsatz: $\binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}x^0 y^n = (x + y)^n$

d) Reihendarstellung von e: $1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = e^x$

4.2 Arithmetische Reihen

DEFINITION 4.4

Sei $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge mit $a_n = a_0 + n \cdot d$. Dann nennt man die Folge $\langle s_n \rangle$ mit

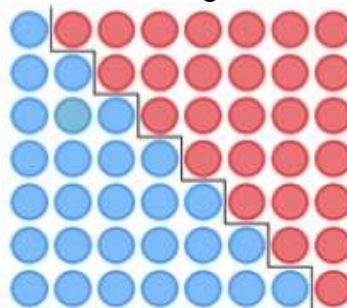
$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

die dazugehörige *arithmetische Reihe*.

Bekanntlich lässt sich die Summe der ersten n natürlichen Zahlen mithilfe der Gaußschen Summenformel berechnen.

AUFGABE 4.5

Begründe die Summenformel mithilfe der folgenden Graphik!



[https://www-app.uni-regensburg.de/Fakultaeten/MAT/schuelerzirkel/pmwiki/uploads/Thema_2017-18-1-beweiseohne Worte.pdf (01.11.2021)]

SATZ 4.6 Gaußsche Summenformel

Die arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = n$ besitzt die Summe

$$s_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

AUFGABE 4.7

Beweise die Gaußsche Summenformel

- a) durch Umgruppierung der Summanden der doppelten Summe.
b) durch vollständige Induktion.

AUFGABE 4.8

Leite eine Summenformel für die Glieder einer allgemeinen arithmetischen Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = a_0 + n \cdot d$ her!

AUFGABE 4.9

Sei $\langle a_n \rangle$ eine nicht-konstante arithmetische Folge mit dem Anfangswert $a_1 = 1$. Die Folgenglieder a_2, a_5 und a_{11} bilden eine geometrische Folge. Berechne die Summe der ersten 2009 Folgenglieder!

[Slowenien 2009]

AUFGABE 4.10

Gegeben seien n Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel seien und von denen keine drei durch einen Punkt gehen sollen. In wie viele Teilgebiete zerlegen diese Geraden die Ebene?

[Grieser, Daniel, Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik, Wiesbaden 2017, Seite 42ff.]

AUFGABE 4.11

Leite eine Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen her, indem Du die folgende Matrix verwendest!

$$\left. \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & k & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & k & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & k & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & k & \cdots & n \end{array} \right\} n\text{-Zeilen}$$

[Manfrino, Radmila, Topics in Algebra and Analysis. Preparing for the Mathematical Olympiad, Switzerland 2015, Seite 38]

4.3 Geometrische Reihen

DEFINITION 4.12

Sei $\langle b_n \rangle$ eine geometrische Folge mit $b_n = b_0 \cdot q^n$. Dann nennt man die Folge $\langle s_n \rangle$ mit

$$s_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

die dazugehörige *geometrische Reihe*.

Auch für endliche geometrische Reihen existiert eine Summenformel:

SATZ 4.13 Summenformel für endliche geometrische Reihen

Die geometrische Folge $\langle b_n \rangle$ mit $b_n = b_0 \cdot q^n$ besitzt die Summe

$$\sum_{k=0}^n b_0 q^k = b_0 + b_0 q + b_0 q^2 + \dots + b_0 q^n = b_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

AUFGABE 4.14

Beweise die Summenformel für endliche geometrische Reihen

- a) indem Du von dieser Summe das q -fache dieser Summe abziehst,
- b) mithilfe der vollständigen Induktion.

AUFGABE 4.15

Berechne die Produkte $3 \cdot 4, 33 \cdot 34, 333 \cdot 334$. Vermute ein allgemeines Gesetz und beweise es!

[27. Österreichische Mathematik-Olympiade 1996, Landeswettbewerb für Anfänger, Aufgabe 3 (Gerd Baron)]

AUFGABE 4.16

Gegeben ist die mit 2016 Nullen geschriebene Zahl 101010...0101, in der sich die Ziffern 1 und 0 abwechseln. Beweise, dass diese Zahl keine Primzahl ist.

[Bundeswettbewerb Mathematik 2016 (Deutschland), 1.Runde, Aufgabe 1]

AUFGABE 4.17

Man berechne $\sum_{r=1}^n \frac{r}{2^r}$, wenn n eine natürliche Zahl ist.

[3. Österreichische Mathematik-Olympiade 1972, Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene, Aufgabe 2 (Gerd Baron)]

AUFGABE 4.18

Man berechne für alle natürlichen Zahlen n die Summe

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{3^k}{2} \right\rfloor}}{3^k}.$$

[11. Österreichische Mathematik-Olympiade 1980, Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene, Aufgabe 3 (Gerd Baron)]

DEFINITION 4.19 *konvergente und divergente Reihen*

Sei s_n eine unendliche Reihe mit $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

- ♣ Falls die Folge der Teilsummen dieser Reihe einen Grenzwert besitzt, so ist die Reihe konvergent und dieser Grenzwert wird Summe der Reihe genannt. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

- ♣ Falls die Folge der Teilsummen dieser Reihe keinen Grenzwert besitzt, so ist die Reihe divergent und besitzt keine Summe.

AUFGABE 4.20

Veranschauliche geometrisch mithilfe von Rechtecksflächen, dass die geometrische

Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ gegen 1 konvergiert!

[<https://www.mathe-online.at/materialien/Petra.Grell/files/WSAnaFolgen.pdf> (29.10.2021)]

SATZ 4.21 *Summenformel einer unendlichen geometrischen Reihe*

Eine unendliche geometrische Reihe mit dem Anfangsglied b_1 und dem konstanten Quotienten $q \neq 0$ ist konvergent, falls $|q| < 1$. Die unendliche Reihe hat dann den Grenzwert

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} b_1 q^k = \frac{b_1}{1-q}.$$

BEISPIEL 4.22

Der italienische Physiker und Mathematiker Evangelista Torricelli (1608–1647) fand einen geometrischen Beweis dafür, dass die unendliche geometrische Reihe $b + b \cdot q + b \cdot q^2 + b \cdot q^3 + \dots$ für $0 < q < 1$ gegen die reelle Zahl $s = \frac{b}{1-q}$ konvergiert.

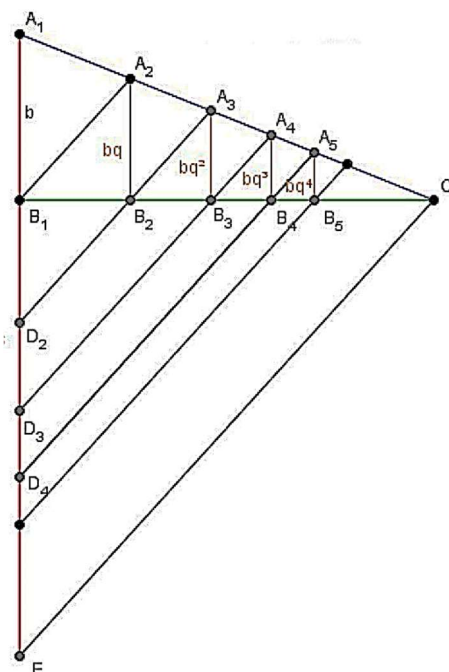
Den Beweis führte er anhand nebenstehender Figur:

Voraussetzungen:

$$\left. \begin{array}{l} q > 0 \\ q < 1 \text{ wegen } b \cdot q < b \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < q < 1$$

Die Strecken A_2B_2, A_3B_3 usw. sind parallel zu AE .
Die Strecken A_2B_1, A_3D_2 usw. sind parallel zu CE .

[Bleier, Dimensionen Mathematik 6, Wien 2015, Seite 233]



Beweisschritte:

- a) Zeige, dass die Strecken $b, b \cdot q, b \cdot q^2, b \cdot q^3$, usw. tatsächlich um den Faktor q verkürzt werden. (Hinweis: Gegeben sind die Strecken $A_1B_1 = b$ und $A_2B_2 = b \cdot q$.

Beweise, dass $A_3B_3 = b \cdot q^2$.)

- b) Zeige, dass die Streckenlänge $\overline{A_1E}$ der unendlichen Summe $s = b + b \cdot q + b \cdot q^2 + b \cdot q^3 + \dots$ entspricht.

- c) Zeige mithilfe von Strahlensätzen, dass $s = \frac{b}{1-q}$ ist.

[Bleier, Dimensionen Mathematik 6, Wien 2015, Seite 233]

- a) Wegen der Ähnlichkeit der Trapeze $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2$ usw. gilt:

$$\overline{A_3B_3} : b \cdot q = b \cdot q : b$$

$$\overline{A_3B_3} = \frac{b \cdot q \cdot b \cdot q}{b} = b \cdot q^2.$$

- b) Wir können dem Parallelogramm $B_1A_2B_2D_2$ entnehmen, dass B_1D_2 die Länge $b \cdot q$ hat. D_2D_3 hat die Länge $b \cdot q^2$ usw. Somit hat die Strecke $\overline{A_1E}$ die Länge

$$b + b \cdot q + b \cdot q^2 + b \cdot q^3 + \dots$$

- c) Zunächst betrachten wir die Strahlen CA_1 und CB_1 . Für die Strecken $b, b \cdot q, A_1C$ und A_2C gilt:

$$b \cdot q : b = \overline{A_2C} : \overline{A_1C}.$$

Wir bezeichnen A_1C mit Y und A_1A_2 mit Z . Dann ist $\overline{A_2C} = Y - Z$, und es gilt:

$$b \cdot q : b = (Y - Z) : Y$$

$$q : 1 = (Y - Z) : Y$$

$$q = \frac{Y - Z}{Y}$$

$$q = 1 - \frac{Z}{Y}$$

$$\frac{Z}{Y} = 1 - q$$

$$\frac{Y}{Z} = \frac{1}{1-q} \quad (1)$$

Nun betrachten wir die Strahlen A_1C und A_1E . Für die Strecken A_1E, b, A_1C und A_1A_2 gilt:

$$\overline{A_1E} : b = \overline{A_1C} : \overline{A_1A_2}.$$

Oder mit den Bezeichnungen $s = \overline{A_1E}$, $b, Y = \overline{A_1C}$ und $Z = \overline{A_1A_2}$.:

$$s : b = Y : Z$$

$$s = b \cdot \frac{Y}{Z} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich insgesamt:

$$s = b \cdot \frac{Y}{Z} = b \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{b}{1-q}$$

Somit haben wir gezeigt, dass die unendliche Reihe $b + b \cdot q + b \cdot q^2 + b \cdot q^3 + \dots$ für $0 < q < 1$ gegen die reelle Zahl $s = \frac{b}{1-q}$ konvergiert.

□

AUFGABE 4.23

Stelle die periodische Dezimalzahl $0,\overline{14}$ als unendliche geometrische Reihe und als Bruch dar!

[Freiler, Lösungswege Mathematik Oberstufe 6, Wien 2016, Seite 146]

AUFGABE 4.24

Seien $M, N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$ und $M < N$. Finde Formeln für die folgenden Summen!

- a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{N^k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{N^k}$
- b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{(M+1)^k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{M^k}{(M+1)^k}$
- c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{N^k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{M^k}{N^k}$

[https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Geometrische_Reihe (28.10.2018)]

AUFGABE 4.25

Berechne die Grenzwerte folgender Reihen:

- a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$
- b) $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{3^{k-2}}$

[https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Geometrische_Reihe (28.10.2018)]

AUFGABE 4.26

Die Tatsache, dass eine unendliche Reihe eine endliche Summe besitzen kann, hat schon den Griechen der Antike Kopfzerbrechen bereitet. Vom griechischen Philosophen Zenon von Elea (5.Jh. v. Chr.) stammt folgendes Paradoxon:

Achill und eine Schildkröte veranstalten ein Wettrennen, wobei Achill der Schildkröte fairerweise einen Vorsprung von 1 Stadionlänge (ca. 185 m) gewährt. Wenn Achill die ganze Strecke des Stadions durchlaufen habe, sei die Schildkröte um $\frac{1}{10}$ der Strecke

vorgerückt. Wenn Achill eben diese Strecke zurückgelegt habe, sei ihm die Schildkröte wieder um $\frac{1}{10}$ dieser zweiten Strecke voraus, und so weiter bis in alle Ewigkeit. Immer,

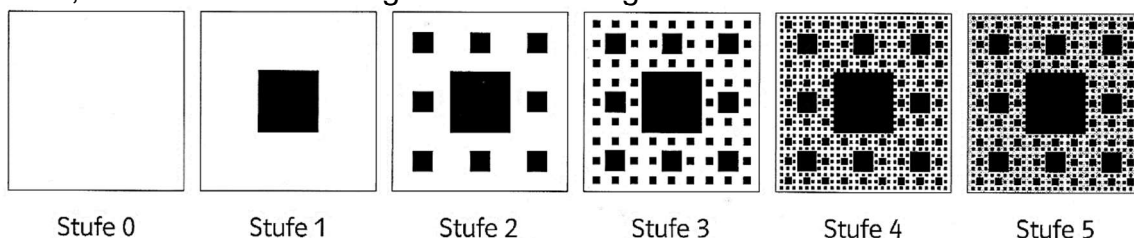
wenn Achill den ursprünglichen Ort der Schildkröte erreicht, ist sie ihm ein Stück der Strecke voraus. Achilles kann die Schildkröte also nie einholen.

- a) Setze die Folge der Länge des Vorsprungs, den die Schildkröte gegenüber Achill hat, fort. Zeige, dass eine geometrische Folge vorliegt.
- b) Bilde die dazugehörige geometrische Reihe und ermittle den Grenzwert! Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert für die Geschichte des Zenons?
- c) Was sagst Du zu Zenons Argumentation?

[Bleier, Dimensionen Mathematik 6, Wien 2015, Seite 233; Malle, Mathematik verstehen 6, Wien 2010, Seite 138]

AUFGABE 4.27

Der Sierpinski-Teppich ist ein Fraktal, welches vom polnischen Mathematiker Waclaw Sierpinski entwickelt wurde. Bei diesem quadratischen Teppich (Seitenlänge $s = 1$) wird aus der Mitte ein Neuntel der Fläche entfernt. Übrigbleiben (um das Loch herum) acht quadratische Felder. Aus diesen entfernt man wieder ein Neuntel der Fläche. Diesen Vorgang kann man theoretisch unendlich oft durchführen. Es entsteht dann ein Muster, wie man es in der folgenden Abbildung sehen kann:

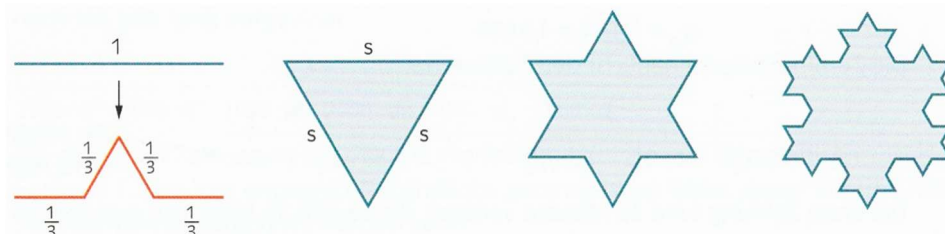


- Gib rekursive und explizite Formeln für den Flächeninhalt und den Umfang des n -ten Teppichstücks an!
- Zeige: Für $n \rightarrow \infty$ besitzt der Sierpinski-Teppich keine Fläche, aber einen unendlich großen Umfang.

[Brand, Thema Mathematik für die 6.Klasse AHS, Wien 2010, Seite 88; Freiler, Lösungswege Mathematik Oberstufe 6. Arbeitsheft, Wien 2016, Seite 46]

AUFGABE 4.28

Die Koch'sche Schneeflockenkurve entsteht durch folgende Konstruktion: Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $s = 1$. Man teilt jede der Seiten in drei gleich lange Teilstrecken und setzt auf die mittlere Teilstrecke wieder ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge so lang ist wie die Teilstrecke der Ausgangsseite. Man erhält nun vier gleich lange Streckenstücke, bei denen der Vorgang jeweils wiederholt wird. Die Abbildung zeigt die „Schneeflocke“, nachdem die Konstruktion zweimal wiederholt wurde.



- Gib rekursive und explizite Formeln für den Umfang und den Flächeninhalt der n -ten Schneeflocke an!
- Zeige: Für $n \rightarrow \infty$ besitzt die Koch'sche Schneeflockenkurve einen unendlich großen Umfang, aber eine endliche Fläche.

[Brand, Thema Mathematik für die 6.Klasse AHS, Wien 2010, Seite 88; Freiler, Lösungswege Mathematik Oberstufe 6, Wien 2016, Seite 150]

4.4 Harmonische Reihen

DEFINITION 4.28

Eine *harmonische Reihe* ist die zu einer harmonischen Folge gehörende Reihe.

Den Abschluss dieses Skriptums bildet ein Satz zur Divergenz der wichtigsten harmonischen Reihe, den wir auf zwei unterschiedliche Arten beweisen:

SATZ 4.29

Die harmonische Reihe zur Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist divergent.

Beweis 1:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}}_{\geq 16 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2}} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

□

Beweis 2:

Wir führen einen indirekten Beweis. Wir nehmen also an, dass die harmonische Reihe konvergiert, das heißt es gibt eine positive (endliche) reelle Zahl a mit

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = a$$

Dann konvergieren auch die Reihen über die ungeraden und über die geraden Glieder der harmonischen Reihe, das heißt es gibt positive Zahlen b und c mit

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = b \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = c$$

Offensichtlich ist $a = b + c$. Da a , b und c endlich sind, muss b echt größer als c sein. Daraus ergibt sich

$$a = b + c > 2c = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = a,$$

das heißt a ist eine reelle Zahl mit $a > a$. Somit erhalten wir einen Widerspruch. Also ist die Annahme falsch, das heißt die harmonische Reihe ist divergent.

[Johannes Gutenberg Universität (Hg.), Monoid. Mathematikblatt für Mitdenker, Heft 194, Mainz 2008, Seite 11]

□