56. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb – Lösungen

12. Juni 2025

Aufgabe 1. *Man bestimme alle Tripel* (a, b, c)*, wobei* a*,* b*,* $c \geq 0$ *ganze Zahlen sind, die*

$$ab + bc + ca = 2(a + b + c)$$

erfüllen.

(Karl Czakler)

Antwort. Die 17 Lösungen sind alle Permutationen der Tripel $(0, 0, 0)$, $(0, 3, 6)$, $(0, 4, 4)$, $(1, 2, 4)$, $(2, 2, 2)$.

Lösung 1. Da die Angabe symmetrisch in a, b und c ist, können wir o. B. d. A. $a \leq b \leq c$ annehmen. Die Gleichung kann man in der Form

$$a(b - 2) + b(c - 2) + c(a - 2) = 0$$

anschreiben. Daraus folgt $a \leq 2$. Wir unterscheiden drei Fälle:

- $a = 2$
  Dann folgt $2b - 4 + bc - 2b = 0$, also $bc = 4$ und damit $(b, c) = (1, 4)$ oder $(b, c) = (2, 2)$. Nur letztere Möglichkeit erfüllt die Annahme $a \leq b \leq c$. Also ist das Tripel $(2, 2, 2)$ hier die einzige Lösung.

- $a = 1$
  Dann folgt $b + bc + c = 2 + 2b + 2c$ und damit $(b - 1)(c - 1) = 3$. Der Fall $b - 1 = -3$ und $c - 1 = -1$ ist nicht möglich, da b positiv sein muss. Also muss $b - 1 = 1$ und $c - 1 = 3$ sein. Die einzige Lösung ist hier somit das Tripel $(1, 2, 4)$.

- $a = 0$
  Dann folgt $bc = 2b + 2c$ und damit $(b - 2)(c - 2) = 4$. Die einzigen Möglichkeiten sind:
  - $b - 2 = 1$ und $c - 2 = 4$. Wir erhalten das Lösungstripel $(0, 3, 6)$.
  - $b - 2 = -4$ und $c - 2 = -1$. In diesem Fall ist b negativ, also ergibt sich keine Lösung.
  - $b - 2 = 2$ und $c - 2 = 2$. Wir erhalten das Lösungstripel $(0, 4, 4)$.
  - $b - 2 = -2$ und $c - 2 = -2$. Wir erhalten das Lösungstripel $(0, 0, 0)$.

Alle Lösungstripel sind daher $(2, 2, 2)$, $(1, 2, 4)$, $(0, 3, 6)$, $(0, 4, 4)$ und $(0, 0, 0)$ samt allen Permutationen.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wir betrachten zunächst den Fall, dass (mindestens) eine der Variablen gleich 0 ist. Da die Gleichung symmetrisch ist, können wir o. B. d. A. $a = 0$ und $b \leq c$ annehmen. Wie in der vorherigen Lösung erhalten wir damit die Lösungstripel $(0, 3, 6)$ und $(0, 4, 4)$.

Nun sei $abc \neq 0$. Es folgt a, b, $c \geq 1$. Wieder können wir o. B. d. A. $c \geq b \geq a \geq 1$ annehmen. Die Gleichung lässt sich nun in der Form

$$(a - 1)(b - 1) + (b - 1)(c - 1) + (c - 1)(a - 1) = 3$$

schreiben. Nach Voraussetzung ist jedes der drei Produkte größer oder gleich 0. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Angenommen, $a = 1$. Dann folgt $(b-1)(c-1) = 3$, also $b = 2$, $c = 4$.
- Angenommen, $a > 1$. Dann ist jeder Faktor links größer als 0, also mindestens 1. Es müssen also alle Faktoren gleich 1 sein, da sich sonst eine größere Zahl als 3 ergibt. Wir erhalten $a = b = c = 2$.

Somit sind die Lösungstripel genau $(0, 0, 0)$, $(6, 3, 0)$, $(4, 4, 0)$, $(4, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$ und deren Permutationen.

(Gottfried Perz) □

Lösung 3. Wir stellen fest, dass höchstens eine der drei Zahlen ungerade sein kann, da sonst die linke Seite ungerade wäre.

- Wir betrachten zunächst o. B. d. A. den Fall, dass a ungerade ist und b und c gerade sind. Weiters nehmen wir o. B. d. A. $b \leq c$ an.
  - Ist $a = 1$, so folgt $b + bc + c = 2 + 2b + 2c$ bzw. $(b-1)(c-1) = 3$. Dies hat nur die Lösung $b = 2$ und $c = 4$. Damit erhalten wir das Lösungstripel $(1, 2, 4)$.
  - Ist $a = 3$, so folgt $3b + bc + 3c = 6 + 2b + 2c$ bzw. $(b+1)(c+1) = 7$. Dies hat nur die Lösung $b = 0$ und $c = 6$. Damit erhalten wir das Lösungstripel $(3, 0, 6)$.
  - Ist $a > 3$ und $b, c \geq 2$, so folgt $2a + 2b + 2c = ab + bc + ca > 2b + 2c + 2a$, Widerspruch. Also muss $b = 0$ sein. Es folgt $ca = 2a + 2c$ bzw. $(c-2)(a-2) = 4$. Dies ist aber nicht möglich, da a ungerade ist.
- Es seien nun a, b und c gerade und o. B. d. A. $0 \leq a \leq b \leq c$.
  - Ist $a = 0$, so folgt $bc = 2b + 2c$ bzw. $(b-2)(c-2) = 4$. Da b und c gerade sind, hat dies nur die Lösungen $b = c = 0$ und $b = c = 4$. Damit erhalten wir die Lösungstripel $(0, 0, 0)$ und $(0, 4, 4)$.
  - Ist $a \geq 2$, so folgt $2a + 2b + 2c = ab + bc + ca \geq 2b + 2c + 2a$ mit Gleichheit für $a = b = c = 2$, woraus man das Lösungstripel $(2, 2, 2)$ erhält.

Sämtliche (17) Lösungen erhält man durch die Permutationen der gefundenen Lösungstripel.

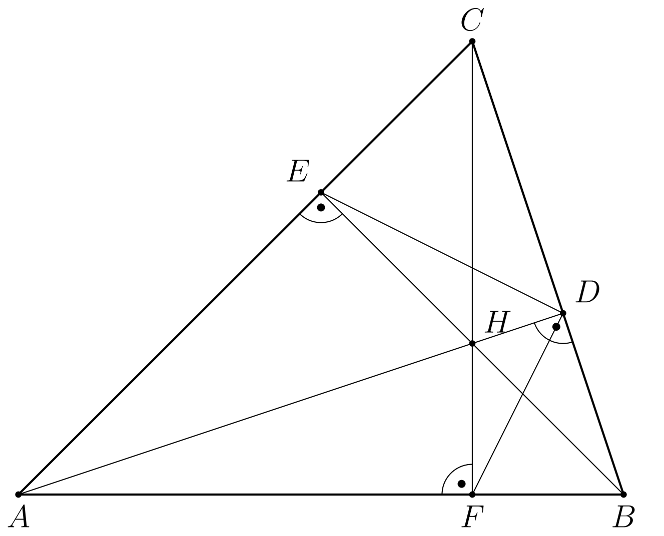
(Reinhard Razen) □

Aufgabe 2. *Gegeben sei ein spitzwinkeliges Dreieck ABC. Die Punkte D, E und F seien die Fußpunkte der Höhen durch die Eckpunkte A, B und C.*

Man zeige: Wenn $AF = CF$, dann stehen die Strecken DE und DF aufeinander normal.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Das Dreieck AFC ist ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck, daher gilt $\sphericalangle FAC = \sphericalangle ACF = 45°$. Das Viereck $HECD$ ist ein Sehnenviereck, daher gilt $\sphericalangle EDH = \sphericalangle ECH = \sphericalangle ACF = 45°$.



Ebenso ist das Dreieck AEB ein rechtwinkeliges Dreieck, daher gilt $\sphericalangle EBA = 90° - \sphericalangle BAE = 90° - \sphericalangle FAC = 45°$. Das Viereck $HFBD$ ist ein Sehnenviereck, daher gilt $\sphericalangle HDF = \sphericalangle HBF = \sphericalangle EBA = 45°$.

Daraus folgt $\sphericalangle EDF = \sphericalangle EDH + \sphericalangle HDF = 90°$.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Die Punkte F und D liegen auf dem Thaleskreis über AC. Das Dreieck AFC ist gleichschenklig, somit ist $\sphericalangle FCA = 45°$. Nach dem Peripheriewinkelsatz ist daher auch $\sphericalangle FDA = 45°$.

Analog liegen die Punkte E und D auf dem Thaleskreis über AB. Das Dreieck BEA ist gleichschenklig, somit ist $\sphericalangle ABE = 45°$. Nach dem Peripheriewinkelsatz ist daher auch $\sphericalangle ADE = 45°$.

Somit ist $\sphericalangle FDE = \sphericalangle FDA + \sphericalangle ADE = 45° + 45° = 90°$

(Reinhard Razen) □

Lösung 2a. Die Punkte F und D liegen auf dem Thaleskreis über AC. Das Dreieck AFC ist gleichschenklig, somit ist $\sphericalangle FCA = 45°$. Nach dem Peripheriewinkelsatz ist daher auch $\sphericalangle FDA = 45°$. Die Höhe AD halbiert bekanntlich den Innenwinkel des Höhenfußpunktdreiecks FDE. Somit ist $\sphericalangle FDE = 2 \cdot \sphericalangle FDA = 2 \cdot 45° = 90°$.

(Reinhard Razen) □

Lösung 3. Es sei M der Mittelpunkt von AC. Bekanntlich liegen die Punkte D, E, F und M am Feuerbachkreis. Das Dreieck AFC ist gleichschenklig, also gilt $\sphericalangle FMC = \sphericalangle FME = 90°$. Da $DEMF$ ein Sehnenviereck ist, folgt $\sphericalangle EDF = 90°$.

(Michael Reitmeir) □

Aufgabe 3. *Wie viele vierstellige Zahlen gibt es im Dezimalsystem, bei denen die Tausenderziffer größer als alle anderen Ziffern ist?*

(Gerhard Kirchner)

Antwort. 2025

Lösung 1. Wenn $k \in \{1, \ldots, 9\}$ die erste Ziffer ist, so können die übrigen Ziffern aus $\{0, \ldots, k-1\}$ gewählt werden, es gibt also k Möglichkeiten für jede Ziffer, das sind k^3 Möglichkeiten für den Block aus den letzten 3 Ziffern. Insgesamt sind es also

$$1^3 + 2^3 + \ldots + 9^3 = \left(\frac{9 \cdot 10}{2}\right)^2 = 45^2 = 2025$$

Möglichkeiten, vgl. die bekannte Formel, die auch auf der Formelsammlung steht.

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 2. Wir betrachten zunächst die vierstelligen Zahlen, bei denen die Tausenderziffer nicht größer als die anderen Ziffern ist. Es sei $k \in \{1, \dots, 9\}$ die Tausenderziffer.

- Ist die Hunderterziffer größer oder gleich k (dafür gibt es $10 - k$ Möglichkeiten), dann können die Zehner- und die Einerziffer beliebig sein (jeweils 10 Möglichkeiten), insgesamt gibt es in diesem Fall also $(10 - k) \cdot 10^2$ Möglichkeiten.
- Ist die Hunderterziffer kleiner als k (k Möglichkeiten), dann muss
  - entweder die Zehnerziffer größer oder gleich k ($10 - k$ Möglichkeiten) und die Einerziffer beliebig sein (10 Möglichkeiten), gesamthaft gibt es also $(10 - k) \cdot 10$ Möglichkeiten,
  - oder die Zehnerziffer kleiner als k (k Möglichkeiten) und die Einerziffer größer oder gleich k sein ($10 - k$ Möglichkeiten), gesamthaft gibt es also $k(10 - k)$ Möglichkeiten,

  woraus sich in diesem Fall $k((10 - k) \cdot 10 + k(10 - k)) = k(10 - k)(10 + k)$ Möglichkeiten ergeben.

Für festes k erhalten wir also

$$(10 - k) \cdot 10^2 + k(10 - k)(10 + k) = (10 - k)(10^2 + 10k + k^2) = 1000 - k^3$$

Möglichkeiten. Summieren wir über k so erhalten wir $\sum_{k=1}^{9}(1000 - k^3) = 9000 - \left(\frac{9(9+1)}{2}\right)^2 = 9000 - 45^2$. Um schließlich die vierstelligen Zahlen zu erhalten, bei denen die Tausenderziffer größer als die anderen Ziffern ist, müssen wir noch $9000 - 45^2$.von der Anzahl aller vierstelligen Zahlen, also von 9000, subtrahieren. Das ergibt $45^2 = 2025$.

(Reinhard Razen) □

Aufgabe 4. *Wir betrachten alle Zahlen der Form*

$$20^n + 2 \cdot 5^n,$$

wobei $n \geq 2025$ *eine ganze Zahl ist.*

Man bestimme die größte ganze Zahl k*, die jede dieser Zahlen teilt.*

(Walther Janous)

Antwort. $k = 6 \cdot 5^{2025}$

Lösung 1. Es ist $20^n + 2 \cdot 5^n = 5^n(4^n + 2) = 5^{2025} \cdot 5^{n-2025} \cdot 2 \cdot (2^{2n-1} + 1)$. Wegen $n - 2025 \geq 0$ ist $k = 5^{2025} \cdot 2 \cdot d$, wobei d der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen der Form $2^{2n-1} + 1$ für $n \geq 2025$ ist. Nun ist aber

$$\mathrm{ggT}(2^{2n-1} + 1, 2^{2n+1} + 1) = \mathrm{ggT}(2^{2n-1} + 1, 2^{2n+1} + 1 - 4(2^{2n-1} + 1)) = \mathrm{ggT}(2^{2n-1} + 1, -3) \in \{1, 3\}.$$

Wegen $2^{2n-1} + 1 \equiv (-1)^{2n-1} + 1 \equiv 0 \pmod 3$ haben wir schließlich $d = 3$ und somit $k = 6 \cdot 5^{2025}$.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Es sei $a_n = 20^n + 2 \cdot 5^n = 5^n(4^n + 2) = 5^{2025} \cdot 5^{n-2025}(4^n + 2)$. Wegen $n - 2025 \geq 0$ sind alle a_n jedenfalls durch 5^{2025} teilbar. Weiters ist $a_{2025} = 5^{2025}(4^{2025} + 2)$ und $a_{2026} = 5^{2026}(4^{2026} + 2)$.

- Wegen $4^{2025} + 2 \equiv 4 + 2 \equiv 1 \not\equiv 0 \pmod 5$ ist 5^{2025} die größte Potenz von 5, die in a_{2025} und somit auch in allen a_n mit $n \geq 2025$ vorkommt.
- Wegen $4^n + 2 \equiv 2 \pmod 4$ kommt 2 in allen a_n nur in erster Potenz vor.
- Wegen $4^n + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ ist jedes a_n durch 3 teilbar. Da aber $4^{2025} + 2 = (4^3)^{675} + 2 \equiv 1 + 2 = 3 \pmod 9$ gilt, ist 3^1 die größte Potenz von 3, die in allen a_n vorkommt.

- Es sei nun $p > 3$ ein gemeinsamer Primteiler von $4^{2025} + 2$ und $4^{2026} + 2$, dann teilt p auch die Differenz $4^{2026} + 2 - (4^{2025} + 2) = 3 \cdot 4^{2025} = 3 \cdot 2^{4050}$, Widerspruch. Es gibt also keine weiteren gemeinsamen Primteiler.

Somit ist $k = 2 \cdot 3 \cdot 5^{2025} = 6 \cdot 5^{2025}$.

(Reinhard Razen) □