56. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale – Lösungen

28./29. Mai 2025

Aufgabe 1. *Seien k und n positive ganze Zahlen.*
Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x^k f(y) - y^n f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

für alle reellen Zahlen x und y mit $x \neq 0$.

(Walther Janous)

Antwort.

- $k \neq n$: $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$
- $k = n$:

$$f(x) = \begin{cases} C(x^k - x^{-k}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

  mit $C \in \mathbb{R}$.

Lösung. Wir bezeichnen die Funktionalgleichung mit (F).

- $y = 0$ in (F) ergibt $x^k f(0) = f(0)$ für alle $x \neq 0$, d.h. $f(0) = 0$.
- $y = x$ mit $x \neq 0$ in (F) führt auf

$$(x^k - x^n) f(x) = f(1). \qquad (1)$$

  Insbesondere folgt für $x = 1$, dass $0 \cdot f(1) = f(1)$, d.h. $f(1) = 0$ ist.
- $y = 1$ in (F) ergibt $0 - f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, d.h. für alle $x \neq 0$ gilt

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x). \qquad (2)$$

  Insbesondere haben wir für $x = -1$, dass $f(-1) = -f(-1)$, d.h. $f(-1) = 0$.
- Damit ist $f(x) = 0$ für $x \in \{-1, 0, 1\}$ gezeigt.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle

(i) $k \neq n$. Mit (1) folgt $f(x) = 0$ für $x^k - x^n \neq 0$. Weil alle reellen Lösungen von $x^k - x^n = 0$ in der Menge $\{-1, 0, 1\}$ enthalten sind, haben wir $f(x) = 0$ als einzige Lösung erhalten, wie man durch die Probe unschwer bestätigt.

(ii) $k = n$. Wenn wir in (F) x $(\neq 0)$ durch $\frac{1}{x}$ ersetzen, ergibt sich

$$x^{-k} f(y) - y^k f\left(\frac{1}{x}\right) = f(xy),$$

d.h. wegen (2)

$$x^{-k} f(y) + y^k f(x) = f(xy). \qquad (3)$$

Durch Vertauschen von x und y erhalten wir

$$y^{-k} f(x) + x^k f(y) = f(xy).$$

Dies und (3) führen auf

$$(y^k - y^{-k})f(x) = (x^k - x^{-k})f(y)$$

für alle $x, y \neq 0$. Deshalb gilt für alle $x, y \neq 0$ mit $x^k - x^{-k} \neq 0$ und $y^k - y^{-k} \neq 0$, dass

$$\frac{f(x)}{x^k - x^{-k}} = \frac{f(y)}{y^k - y^{-k}}.$$

Somit gibt es eine reelle Konstante C mit

$$f(x) = C(x^k - x^{-k}),$$

wenn $x \neq 0$ und $x^k - x^{-k} \neq 0$, d.h. $x \notin \{-1, 0, 1\}$. Wegen $f(-1) = 0$ und $f(1) = 0$ gibt der Funktionsterm auch die Funktionswerte für $x \in \{-1, 1\}$ an. Folglich lauten alle Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} C(x^k - x^{-k}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

mit $C \in \mathbb{R}$, wie man durch folgende Probe bestätigt:

- $x, y \neq 0$. Dann lautet (F)

$$Cx^k(y^k - y^{-k}) - Cy^k(x^k - x^{-k}) = C(y^k x^{-k} - x^k y^{-k}) = C\left(\left(\frac{y}{x}\right)^k - \left(\frac{y}{x}\right)^{-k}\right).$$

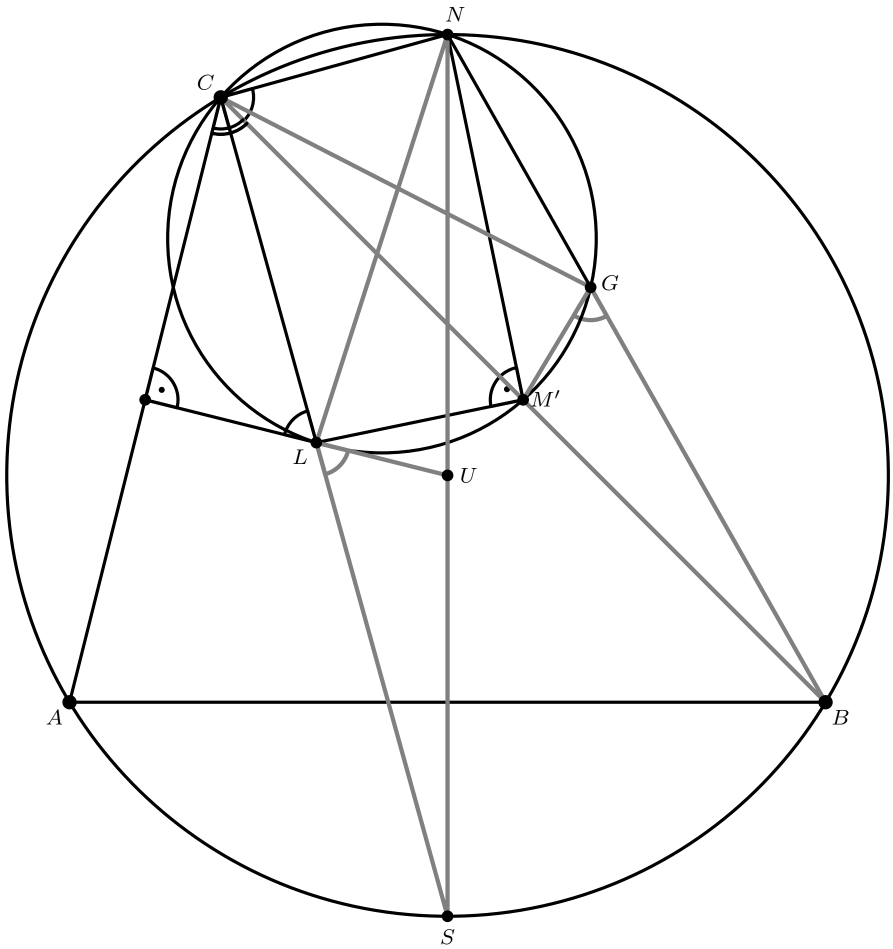
- $y = 0$. Einsetzen in (F) ergibt $0 - 0 = 0$.

(Walther Janous) □

Aufgabe 2. *Sei ABC ein Dreieck mit $AC < BC$. Der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle ACB$ mit der Streckensymmetrale von AC sei L, der Mittelpunkt der Seite BC sei M und der Mittelpunkt desjenigen Umkreisbogens zwischen A und B, der C enthält, sei N.*

Man zeige, dass LMN ein rechtwinkliges Dreieck ist.

(Karl Czakler)



Lösung 1.

Seien U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und S der Halbierungspunkt des Umkreisbogens AB, der C nicht enthält. Seien G und M' die jeweils zweiten Schnittpunkte des Umkreises von LNC mit BN bzw. BC. Wir wollen nun zeigen, dass $M' = M$ gilt.

Nach dem Südpolsatz steht die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BCA$ normal auf CN und verläuft durch S. Mit dem Peripheriewinkelsatz folgt

$$\sphericalangle GBC = \sphericalangle NBC = \sphericalangle NSC = \sphericalangle NSL$$

und

$$\sphericalangle CGB = 180° - \sphericalangle NGC = 180° - \sphericalangle NLC = \sphericalangle SLN.$$

Daher sind die beiden Dreiecke BGC und SLN ähnlich.

Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

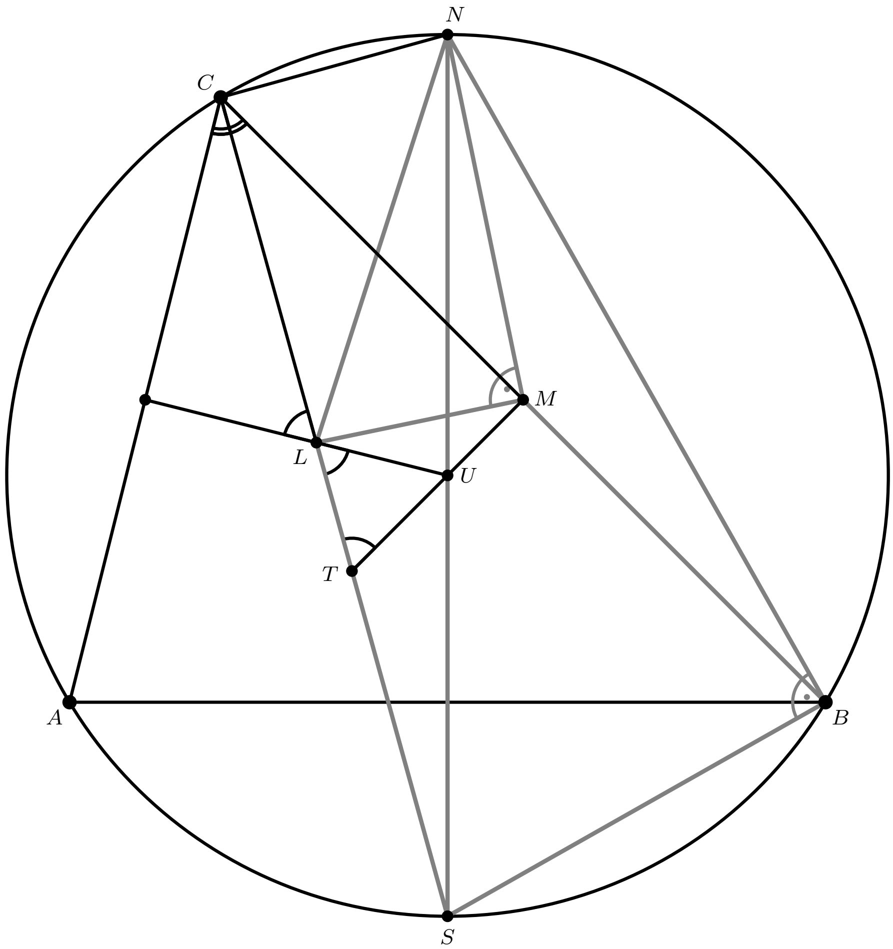
$$\sphericalangle M'GB = \sphericalangle M'CN = \sphericalangle BCN$$

und da NC normal auf CS steht, LU normal auf AC steht und CS die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle ACB$ ist, folgt

$$\sphericalangle M'GB = \sphericalangle BCN = 90° - \sphericalangle SCB = 90° - \sphericalangle ACL = \sphericalangle SLU.$$

Da die beiden Dreiecke BGC und SNL ähnlich sind, U der Mittelpunkt von SN ist und $\sphericalangle M'GB = \sphericalangle SLU$ gilt, folgt, dass M' der Halbierungspunkt der Strecke BC und daher ident mit M ist. Also liegen C, L, M und N auf einem Kreis, und da $\sphericalangle LCN = 90°$ gilt, folgt $\sphericalangle NML = 90°$.

(Karl Czakler, Josef Greilhuber) □



Lösung 2.

Sei S der Mittelpunkt des Umkreisbogens AB, der C nicht enthält. Sei T der Schnittpunkt der Streckensymmetrale von BC mit der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BCA$. Sei U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.

Eine einfache Winkeljagd ergibt, dass das Dreieck ULT gleichschenklig ist:

$$\sphericalangle TLU = 90° - \sphericalangle ACS = 90° - \sphericalangle SCB = \sphericalangle MTC = \sphericalangle UTL$$

Weil auch das Dreieck SCU gleichschenklig ist, folgt $\overline{CT} = \overline{LS}$.

Die Dreiecke CTM und NSB sind ähnlich, da sie jeweils einen rechten Winkel besitzen und $\sphericalangle TCM = \sphericalangle SCB = \sphericalangle SNB$ gilt. Mit der vorhergehenden Beobachtung folgt

$$\overline{LS} : \overline{MB} = \overline{CT} : \overline{CM} = \overline{NS} : \overline{NB},$$

und weil nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle NBM = \sphericalangle NSL$ gilt, sind die Dreiecke NBM und NSL ähnlich.

Die Drehstreckung in N, die B in S überführt, bildet also auch M auf L ab. Damit folgt, dass die Dreiecke SBN und LMN ähnlich sind. Da NSB ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel in B ist, muss NLM rechtwinklig mit rechtem Winkel in M sein.

(Josef Greilhuber) □

Aufgabe 3. *Anna und Bertha spielen zwei Spiele auf einem regelmäßigen 2025-Eck, das Dreiecksspiel und das Vierecksspiel. Bei beiden Spielen wird in jedem Spielzug eine Diagonale des 2025-Ecks eingezeichnet, die noch nicht vorhanden war und auch keine bereits vorhandene Diagonale in einem inneren Punkt schneidet. Die beiden wechseln sich ab, wobei Anna beginnt. Das Spiel endet, wenn keine weitere erlaubte Diagonale eingezeichnet werden kann.*

(a) *Dreiecksspiel: Wenn durch das Einzeichnen der Diagonale ein oder zwei Dreiecke entstehen, dann markiert die Spielerin diese Dreiecke mit ihrem Anfangsbuchstaben. Wer am Ende die meisten Dreiecke markiert hat, gewinnt. Bei Gleichstand endet das Spiel unentschieden. Hat Anna oder hat Bertha eine Gewinnstrategie oder endet das Spiel bei optimalem Spiel unentschieden?*

(b) *Vierecksspiel: Wenn durch das Einzeichnen der Diagonale ein oder zwei nicht unterteilte Vierecke entstehen, dann markiert die Spielerin diese Vierecke mit ihrem Anfangsbuchstaben. Solche Vierecke dürfen danach nicht mehr mit einer Diagonale unterteilt werden. Wer am Ende die meisten Vierecke markiert hat, gewinnt. Bei Gleichstand endet das Spiel unentschieden. Hat Anna oder hat Bertha eine Gewinnstrategie oder endet das Spiel bei optimalem Spiel unentschieden?*

(Theresia Eisenkölbl)

Antwort. 1. Antwort: Bertha hat eine Gewinnstrategie.
2. Antwort: Anna hat eine Gewinnstrategie.

Lösung 1. (a) Wir zeigen mit Induktion, dass Bertha für jedes konvexe Vieleck mit ungerade vielen Seiten (> 3) eine Gewinnstrategie hat. Für $n = 5$ ist das offensichtlich richtig, da für jede eingezeichnete Diagonale eine beliebige weitere einen Punkt Vorsprung für Bertha ergibt.

Für allgemeines n kann Bertha immer ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass es sich um ein regelmäßiges Vieleck handelt. Sie betrachtet einen Eckpunkt der Diagonale, die Anna im ersten Zug eingezeichnet hat, und spiegelt Annas Diagonale an der Symmetrieachse des Vielecks durch diesen Eckpunkt und zeichnet das Spiegelbild ein.

Dadurch entsteht ein Vieleck, dass von beiden Diagonalen begrenzt wird. Ist es ein Dreieck, so hat Bertha dadurch schon einen Punkt Vorsprung. Ansonsten ist es ein ungerades konvexes Vieleck, in dem Bertha nach Induktionsannahme mindestens einen Punkt Vorsprung erzielen kann, solange Bertha auf jeden Zug von Anna in diesem Vieleck antwortet. (Das ist immer möglich, weil die Anzahl der Diagonalen in einem vollständig in Dreiecke unterteilten k-Eck $k - 3$ ist, somit eine gerade Zahl von Zügen in diesem Vieleck stattfindet.)

Es verbleiben die beiden äußeren Vielecke, die jeweils von einer der beiden ersten Diagonalen begrenzt werden. Sind sie bereits Dreiecke, so hat jede Spielerin einen weiteren Punkt, was an Berthas Sieg nichts ändert. Ansonsten kann Bertha immer in einem Vieleck spiegelgleich Annas Zug im anderen Vieleck nachmachen, was garantiert, dass sie dort gleichviele Punkte erhält und somit gewinnt.

(b) Ein Vieleck der Ordnung r sei ein Vieleck mit $r + 2$ Ecken (das heißt, dass es mit Diagonalen vollständig in n Dreiecke unterteilt werden könnte). Eine Diagonale unterteilt das Vieleck in zwei Vielecke der Ordnungen $a, b \geq 1$ mit $a + b = r$.

Wir ermitteln nun ausgehend von $r = 3$ (ein Fünfeck) das bestmögliche Ergebnis für die beginnende Spielerin und notieren den Abstand zur anderen Spielerin.

$r = 3$: $\boxed{1}$. Anna schneidet sich ein Viereck ($a = 2$) ab, das Spiel endet mit einem Punkt Vorsprung für Anna.

$r = 4$: $\boxed{2}$. Anna teilt die Figur in zwei Vierecke und erhält somit 2 Punkte Vorsprung.

$r = 5$: $\boxed{0}$. Die Wahl $a = 1$, $b = 4$ ergibt 2 Punkte für Bertha. Die Wahl $a = 2$, $b = 3$ ergibt 0 Punkte Unterschied. Somit wählt Anna $a = 2$, $b = 3$.

$r = 6$: $\boxed{0}$. Die Wahl $(a, b) = (1, 5)$ ergibt 0 Punkte Unterschied, die Wahl $(2, 4)$ ergibt einen Punkt für Bertha, die Wahl $(3, 3)$ ergibt 0 Punkte Unterschied (beide nehmen sich ein Viereck). Somit wählt Anna $(3, 3)$.

$r = 7$: $\boxed{1}$. Die Wahl $(1, 6)$ ergibt 0 Punkte Unterschied. Die Wahl $(2, 5)$ ergibt 1 Punkt Vorsprung für Anna. Die Wahl $(3, 4)$ ergibt 1 Punkt Vorsprung für Bertha (die natürlich im Vieleck der Ordnung 4 weiterspielt, um sich dort 2 Punkte zu sichern, während sich Anna im Vieleck der Ordnung 3 1 Punkt sichern kann). Somit wird Anna die Option $(2, 5)$ spielen.

Für $r > 7$ gilt folgendes: Wenn Anna ein Viereck ($a = 2$) abschneidet, dann hat sie einen Punkt, während Bertha die Punkte für $r - 2$ bekommt. Bekommt Bertha dafür 0 Punkte, so hat Anna 1 Punkt bekommen. Bekommt Bertha dafür 1 Punkt, so hat Anna 0 Punkte Vorsprung.

Wenn Anna eine andere Unterteilung wählt, dann wird sich Bertha den besseren Teil zum Spielen aussuchen und kann aber auch antworten, wenn Anna im anderen Teil spielt. Anna kann so also bestenfalls Gleichstand erzielen, was schon mit obiger Methode garantiert ist, da wir induktiv nur mehr die Werte 0 und 1 vorfinden.

Die Tabelle ist also:

r	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
	1	2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	...

Es ergibt sich also eine Periode der Länge 4. Da 2025 der Ordnung 2023 entspricht und somit r kongruent zu 3 modulo 4 ist, ist der Wert bei $r = 7$ der richtige. Es gilt also, dass Anna bei optimalem Spiel beider Seiten mit einem Punkt gewinnt.

Zu erwähnen ist noch, dass es unerheblich ist, ob Bertha jemals gezwungen ist, auch im zweiten Teilvieleck zu beginnen, weil Beginnen eben niemals negative Punkte bringt und daher niemals ein Nachteil ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Setze $n = 2025$. Wir verwenden nur, dass $n \equiv 1 \pmod 4$.

Am Ende des Spieles gebe es d Diagonalen, q Vierecke und t Dreiecke. In beiden Spielvarianten gibt es keine weiteren Vielecke, weil sonst weitergespielt werden könnte. Außerdem gibt es noch die Außenfläche, ein n-Eck. Doppeltes Abzählen der Kanten ergibt

$$2(n + d) = 3t + 4q + n$$

und die eulersche Polyederformel ergibt

$$n - (n + d) + (t + q + 1) = 2. \iff t + q = d + 1.$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned} q &= n - d - 3, \\ t &= 2d - n + 4. \end{aligned}$$

Damit ist t jedenfalls ungerade und daraus folgt $t \geq 1$. Insbesondere gilt

$$n \leq 2d + 3. \tag{1}$$

(a) Da $q = 0$ laut Angabe, gilt $d = n - 3$ und $t = n - 2$. Da n ungerade ist, gibt es also eine gerade Anzahl von Zügen. Bertha folgt stets folgender Strategie: Sie nimmt das größte noch vorhandene Vieleck und schneidet ein Dreieck ab. In jedem Zug markiert sie daher mindestens ein Dreieck, im letzten Zug halbiert sie ein Viereck und markiert damit zwei Dreiecke. Damit markiert Bertha mindestens $1 + (n - 3)/2 > t/2$ Dreiecke und hat damit mehr als die Hälfte der Dreiecke markiert und daher gewonnen.

(b) Anna folgt folgender Strategie: sie nimmt das größte noch vorhandene Vieleck und schneidet ein Viereck ab. Damit hat sie in jeder Runde mindestens ein Viereck markiert und daher $\lceil d/2 \rceil$ Vierecke markiert. Wir behaupten nun, dass $\lceil d/2 \rceil > q/2$, womit sie jedenfalls gewonnen hätte. Andernfalls wäre nämlich

$$\frac{d}{2} \leq \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil \leq \frac{n - d - 3}{2} \leq \frac{d}{2}$$

wegen (1). Daher muss überall Gleichheit gelten, also d gerade sein und $n = 2d + 3$. Daraus folgt $n \equiv 3 \pmod 4$, ein Widerspruch.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3. Als *Teilpolygon* bezeichnen wir ein konvexes Polygon, das aus Seiten und bereits eingezeichneten Diagonalen des ursprünglichen Polygons besteht und keine eingezeichneten Diagonalen in seinem Inneren enthält. In jedem Zug wird eine Diagonale eingezeichnet, die ein Teilpolygon in zwei teilt. Wir bezeichnen Teilpolygone als *gerade* oder *ungerade* je nach der Parität der Anzahl ihrer Ecken.

Lemma. Wir zeigen, dass Bertha eine Strategie hat, um sicherzustellen, dass

- Anna zu Beginn von jedem ihrer Züge nur ungerade Teilpolygone vorfindet,
- Anna in jedem Zug höchstens ein Dreieck markieren kann und
- Bertha in jedem Zug mindestens ein Dreieck markieren kann.

Beweis. Zu Beginn des Spiels ist die erste Bedingung erfüllt, da ein einziges 2025-seitiges (Teil-)Polygon vorliegt.

Anna hat in ihrem Zug nur ungerade Teilpolygone zur Auswahl, daher muss sie eines davon teilen. Dabei entsteht auf jeden Fall ein gerades und ein ungerades Teilpolygon. Insbesondere kann höchstens ein Dreieck entstehen und markiert werden.

Bertha teilt nun vom entstandenen geraden Teilpolygon ein Dreieck ab und markiert dieses (sowie im Fall eines Vierecks auch das zweite entstehende Dreieck). Gleichzeitig hat sie wieder den gewünschten Ausgangszustand für Annas Zug hergestellt. ■

Insgesamt werden 2022 Züge gemacht (eine gerade Anzahl), daher machen beide Spielerinnen gleich viele Züge. Somit hat Bertha mindestens gleich viele Dreiecke wie Anna markiert.

Ein Gleichstand kann nicht eintreten, da 2023 Dreiecke (eine ungerade Anzahl) markiert werden, daher markiert Bertha sogar eine echt größere Anzahl Dreiecke. (Alternativ: Im allerletzten Zug wird auf jeden Fall ein Viereck in zwei Dreiecke geteilt, daher markiert Bertha mindestens ein Mal sogar mehr Dreiecke als Anna und gewinnt.)

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 4. Wir zeigen mit vollständiger Induktion: Alle ungeraden Teilpolygone mit mindestens 5 Ecken sind Verlustpositionen.

Induktionsbasis: Bei einem Fünfeck muss Anna ein Dreieck markieren und Bertha kann dann ein Viereck in zwei Dreiecke teilen.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle ungeraden Teilpolygone mit bis zu $2n-1$ Ecken (mit $n \geq 3$).

Induktionsschritt: Wir betrachten ein Teilpolygon mit $2n+1$ Ecken. Anna muss dieses in ein gerades und ein ungerades Teilpolygon teilen. Nun antwortet Bertha, indem sie im geraden Teilpolygon ein Dreieck abtrennt.

Falls Anna ein Dreieck abgetrennt hat, hat jede Spielerin einen Punkt gemacht, und das verbliebene $2n-1$-Teilpolygon ist Verlustposition nach Induktionsvoraussetzung.

Falls Anna ein Viereck abgetrennt hat, hat Bertha dieses in zwei Dreiecke geteilt und dabei zwei Punkte gemacht. Wieder ist das verbliebene $2n-1$-Teilpolygon ist Verlustposition nach Induktionsvoraussetzung.

In allen anderen Fällen hat Bertha einen Punkt gemacht, und es liegen nun zwei ungerade Teilpolygone mit mindestens 5 Ecken vor. Beide sind Verlustpositionen nach Induktionsvoraussetzung, und in beiden ist eine gerade Anzahl von Zügen zu spielen. Daher können wir die beiden als getrennte Spiele betrachten. Wo auch immer Anna ab jetzt spielt, Bertha antwortet im selben Teilpolygon und gewinnt daher in beiden.

(Anmerkung: Um sich die zwei Sonderfälle im Induktionsschritt zu ersparen, kann man alternativ auch argumentieren, dass ein Dreieck ebenfalls die Rolle einer Verlustposition spielt, da man es im Spielverlauf immer bereits markiert erhält und nie selbst markieren kann.)

(Birgit Vera Schmidt) □

Aufgabe 4. *Sei n eine positive ganze Zahl und seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen mit $a_1a_2\cdots a_n = 2^n$. Man beweise, dass*

$$a_1^2 + a_1a_2^2 + a_1a_2a_3^2 + \ldots + a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n^2 \geq 4(2^n - 1)$$

gilt, und man gebe an, wann Gleichheit eintritt.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Für alle $k \geq 1$ ist $(a_k - 2)^2 \geq 0$, was sich zu

$$a_k^2 \geq 4a_k - 4$$

umschreiben lässt. Gleichheit gilt stets nur für $a_k = 2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1a_2^2 + a_1a_2a_3^2 + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n^2 &= \sum_{k=1}^{n} a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} a_1a_2\cdots a_{k-1}(4a_k - 4) \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} a_1a_2\cdots a_k - 4\sum_{k=1}^{n} a_1a_2\cdots a_{k-1} \\ &= 4a_1a_2\cdots a_n - 4 = 4(2^n - 1). \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 2$.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wir teilen den k-ten Term in der Summe auf 2^{k-1} Teile auf:

$$a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k^2 = \frac{1}{2^{k-1}}a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k^2 + \frac{1}{2^{k-1}}a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k^2 + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k^2.$$

Damit entstehen auf der linken Seite $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ Terme. Die arithmetisch-geometrische Mittelungleichung ergibt daher

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1a_2^2 + a_1a_2a_3^2 + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n^2 &\geq (2^n - 1)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdots\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n-1}}(a_1a_2\cdots a_n)^{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n-1}} \\ &= (2^n - 1)\left(2^{-1\cdot 2 - 2\cdot 2^2 - (n-1)\cdot 2^{n-1}} \cdot 2^{n2^n}\right)^{\frac{1}{2^n-1}}. \end{aligned}$$

Wir machen eine Nebenrechnung, um den Exponenten zu berechnen:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k2^k = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{k} 2^k = \sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=\ell}^{n-1} 2^k = \sum_{\ell=1}^{n-1}(2^n - 2^\ell) = (n-1)2^n - 2^n + 2 = n2^n - 2^{n+1} + 2.$$

Somit erhalten wir, dass die linke Seite größer oder gleich

$$(2^n - 1)\left(2^{n2^n - (n2^n - 2^{n+1} + 2)}\right)^{\frac{1}{2^n-1}} = (2^n - 1)\left(2^{2^{n+1}-2}\right)^{\frac{1}{2^n-1}} = (2^n - 1)\cdot 2^2$$

ist, wie gewünscht.

Gleichheit gilt, wenn alle Terme in der Mittelungleichung gleich sind, also $a_1 = a_2^2/2$, $a_2 = a_3^2/2$, und so weiter. Wegen der Bedingung $a_1a_2\cdots a_n = 2^n$ gilt das genau für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 2$. Wäre nämlich eine der Zahlen größer als 2, dann wären alle größer als 2 und somit das Produkt zu groß. Ganz analog ergibt sich ein Widerspruch, wenn eine der Zahlen kleiner als 2 ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 3. Wir zeigen die Ungleichung

$$a_1^2 + a_1a_2^2 + a_1a_2a_3^2 + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n^2 \geq 4(a_1a_2\cdots a_n - 1)$$

(mit Gleichheit nur für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 2$) mit vollständiger Induktion.

- Für $n = 1$ lautet die Ungleichung $a_1^2 \geq 4(a_1-1)$, was zu $(a_1-2)^2 \geq 0$ äquivalent ist, mit Gleichheit nur für $a_1 = 2$.
- Induktionsannahme: Die Ungleichung samt Gleichheitsfall soll bis $n = N$ gelten.
- Induktionsschritt $N \to N+1$. Mit Hilfe der Induktionsannahme erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1a_2^2 + a_1a_2a_3^2 + \cdots + a_1a_2\cdots a_{N-1}a_N^2 &+ a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}^2 \\ &\geq 4(a_1a_2\cdots a_N - 1) + a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}^2 \\ &= a_1a_2\cdots a_N(4 + a_{N+1}^2) - 4. \end{aligned}$$

  Deshalb müssen wir noch die Gültigkeit von

$$a_1a_2\cdots a_N(4 + a_{N+1}^2) - 4 \geq 4(a_1a_2\cdots a_{N+1} - 1)$$

  nachweisen. Weil diese Ungleichung jedoch äquivalent zu

$$a_1a_2\cdots a_N(a_{N+1} - 2)^2 \geq 0$$

  ist (mit Gleichheit nur für $a_{N+1} = 2$), ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Bemerkung. In entsprechender Weise lässt sich sogar folgende noch allgemeinere Aussage beweisen. Sei $\mu \leq 1$ eine positive reelle Zahl. Dann gilt

$$a_1^2 + a_1a_2^2 + a_1a_2a_3^2 + \cdots + a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n^2 \geq 4\mu(a_1a_2\cdots a_n - \mu)$$

mit Gleichheit nur wenn $n = 1$ und $a_1 = 2\mu$, oder wenn $\mu = 1$, $n \geq 2$ und $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 2\mu$.

(Walther Janous) □

Aufgabe 5. *Sei ABC ein Dreieck. Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ liege der Punkt D_n auf der Strecke CB mit $CD_n = \frac{1}{n}CB$ sowie der Punkt E_n auf der Strecke CA mit $CE_n = \frac{1}{n+1}CA$.*

Man beweise, dass die Geraden D_nE_n alle durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

(Walther Janous)

Lösung 1. Sei F der Punkt, sodass $ABCF$ ein Parallelogramm ist. Wir wollen zeigen, dass F auf der Gerade D_nE_n liegt. Dazu führen wir den Punkt X ein, der auf der Verlängerung von BC über B hinaus liegt, sodass $CD_n = BX$.

Es gilt nun aus Symmetriegründen, dass FD_n und AX parallel sind. Somit gilt für den Schnittpunkt Y von FD_n und AC nach dem Strahlensatz, dass

$$CY : CA = CD_n : CX = \frac{CD_n}{CB + BX} = \frac{CD_n}{nCD_n + CD_n} = 1 : (n+1) = CE_n : CA$$

womit $Y = E_n$ und alles bewiesen ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

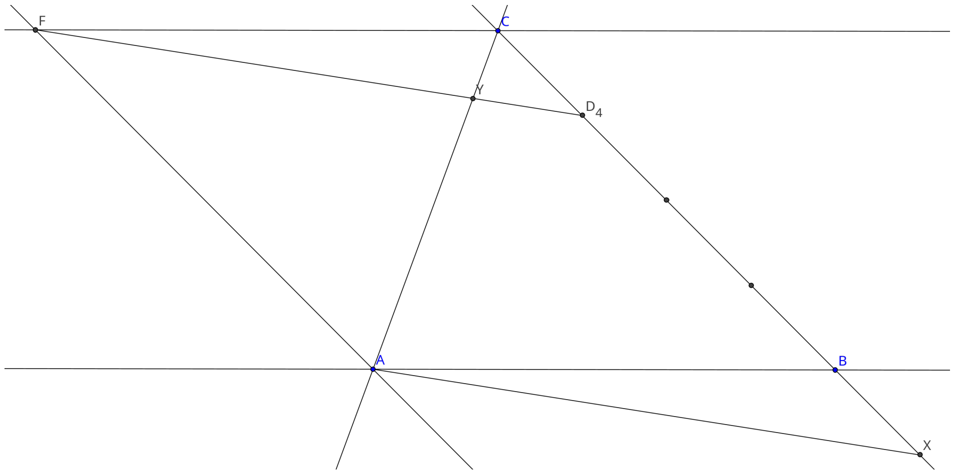


Abbildung 1: Aufgabe 5, Lösung 1

Lösung 2. Durch eine affine Transformation dürfen wir o. B. d. A. annehmen, dass $C(0/0)$, $A(1/0)$, $B(0/1)$. Dann folgt $D_n(0/\frac{1}{n})$ und $E_n(\frac{1}{n+1}/0)$, und die Gleichung der Geraden durch D_n und E_n lautet

$$1 = \frac{x}{\frac{1}{n+1}} + \frac{y}{\frac{1}{n}} = (n+1)x + ny.$$

Diese Gerade enthält offensichtlich den von n unabhängigen Punkt $F(1/-1)$.

(Gerhard Kirchner) □

Aufgabe 6. *Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die es positive ganze Zahlen*

$$z_1 < z_2 < \cdots < z_n$$

mit $\operatorname{ggT}(z_j, z_k) = z_k - z_j$ *für alle j und k mit $1 \le j < k \le n$ gibt.*

(Walther Janous)

Lösung.

Lemma. Seien $a < b$ positive ganze Zahlen. Die Gleichung $\operatorname{ggT}(a, b) = b - a$ gilt genau dann, wenn $(b - a) \mid a$.

Beweis. Wenn $\operatorname{ggT}(a, b) = b - a$, dann gilt $(b - a) \mid a$, weil der größte gemeinsame Teiler natürlich ein Teiler von a ist.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $(b - a) \mid a$ und setzen $d = b - a$. Dann gilt $a = dx$ für eine geeignete positive ganze Zahl x und $b = a + (b - a) = dx + d = d(x + 1)$. Somit gilt

$$\operatorname{ggT}(a, b) = \operatorname{ggT}(dx, d(x+1)) = d \operatorname{ggT}(x, x+1) = d,$$

wie gewünscht. ■

Ein Tupel $(z_1, \ldots, z_n)$ positiver ganzer Zahlen heiße ein gültiges Tupel, wenn $\operatorname{ggT}(z_j, z_k) = z_k - z_j$ für alle $1 \le j < k \le n$.

Wir zeigen nun mit Induktion über n, dass für jedes $n \ge 1$ ein gültiges Tupel existiert. Für $n = 1$ ist jedes 1-Tupel gültig.

Nehmen wir nun an, dass $(z_1, \ldots, z_n)$ ein gültiges Tupel ist, und setzen wir $A = \operatorname{kgV}(z_1, \ldots, z_n)$, $z'_1 = A$ und $z'_k = A + z_{k-1}$ für $2 \le k \le n + 1$. Wir behaupten, dass $(z'_1, \ldots, z'_{n+1})$ ein gültiges Tupel ist.

Wenn $2 \le j < k \le n + 1$, dann gilt

$$z'_k - z'_j = (A + z_{k-1}) - (A + z_{j-1}) = (z_{k-1} - z_{j-1}) \mid z_{j-1} \mid (z_{j-1} + A) = z'_j \tag{2}$$

aufgrund des Lemmas, der Induktionsvoraussetzung und der Konstruktion von A.

Wenn $2 \leq k \leq n+1$, dann gilt

$$z'_k - z'_1 = (A + z_{k-1}) - A = z_{k-1} \mid A = z'_1 \tag{3}$$

nach Konstruktion von A.

Das Lemma, (2) und (3) ergeben, dass $(z'_1, \dots, z'_{n+1})$ ein gültiges Tupel ist.

Remark. Statt A kann auch das Produkt der Zahlen z_1 bis z_n oder ein anderes Vielfaches des kgV gewählt werden.

(Clemens Heuberger) □