Dienstag, 15. Juli 2025

Aufgabe 1. Eine Gerade in der Ebene heiße *sonnig*, falls sie weder zur x-Achse noch zur y-Achse noch zur Geraden $x + y = 0$ parallel ist.

Gegeben sei eine ganze Zahl $n \geqslant 3$. Man bestimme alle nichtnegativen ganzen Zahlen k, sodass es n paarweise verschiedene Geraden in der Ebene gibt, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

- Für alle positiven ganzen Zahlen a und b mit $a+b \leqslant n+1$ liegt der Punkt (a, b) auf mindestens einer der Geraden.
- Genau k der n Geraden sind sonnig.

Aufgabe 2. Es seien Ω und Γ Kreise mit den Mittelpunkten M beziehungsweise N, wobei der Radius von Ω kleiner ist als der Radius von Γ. Die Kreise Ω und Γ schneiden einander in verschiedenen Punkten A und B. Die Gerade MN schneide Ω in C und Γ in D, wobei die Punkte C, M, N und D in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ACD sei P. Die Gerade AP schneide Ω in einem weiteren Punkt $E \neq A$. Die Gerade AP schneide Γ in einem weiteren Punkt $F \neq A$. Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks PMN sei H.

Man beweise, dass die durch H verlaufende Parallele zu AP eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks BEF ist.

Aufgabe 3. Die Menge der positiven ganzen Zahlen sei mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heiße *bonzig*, falls für alle positiven ganzen Zahlen a und b

$$f(a) \ \text{ ein Teiler von } \ b^a - f(b)^{f(a)}$$

ist.

Man bestimme die kleinste reelle Konstante c, für die $f(n) \leqslant cn$ für alle bonzigen Funktionen f und alle positiven ganzen Zahlen n gilt.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Mittwoch, 16. Juli 2025

Aufgabe 4. Ein *strenger Teiler* einer positiven ganzen Zahl N ist ein von N verschiedener positiver Teiler von N.

Die unendliche Folge $a_1, a_2, \dots$ besteht aus positiven ganzen Zahlen, von denen jede mindestens drei strenge Teiler besitzt. Für jedes $n \geqslant 1$ ist a_{n+1} die Summe der drei größten strengen Teiler von a_n.

Man bestimme alle möglichen Werte von a_1.

Aufgabe 5. Alice und Bazza spielen das *Inekoalaty-Spiel*. Dabei handelt es sich um ein Spiel für zwei Personen, dessen Regeln von einer positiven reellen Zahl λ abhängen, die beiden Spielern bekannt ist. Beginnend mit $n = 1$ geschieht im n-ten Zug des Spiels Folgendes:

- Ist n ungerade, dann wählt Alice eine nichtnegative reelle Zahl x_n mit

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \lambda n.$$

- Ist n gerade, dann wählt Bazza eine nichtnegative reelle Zahl x_n mit

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n.$$

Kann ein Spieler keine passende Zahl x_n wählen, endet das Spiel und der andere Spieler gewinnt. Geht das Spiel unendlich lange, gewinnt keiner der Spieler. Beide Spieler kennen alle gewählten Zahlen.

Man bestimme alle Werte von λ, für die Alice eine Gewinnstrategie besitzt, und alle Werte, für die Bazza eine Gewinnstrategie besitzt.

Aufgabe 6. Gegeben sei ein aus Einheitsquadraten bestehendes (2025×2025)-Spielbrett. Matilda möchte rechteckige Kacheln, die unterschiedliche Größen haben können, derart auf das Spielbrett legen, dass der Rand jeder Kachel entlang der Ränder von Einheitsquadraten verläuft und jedes Einheitsquadrat von höchstens einer Kachel überdeckt wird.

Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Kacheln, die Matilda so auf dem Spielbrett platzieren kann, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Einheitsquadrat von keiner der Kacheln überdeckt ist.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.