56. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

28. Mai 2025

1. Seien k und n positive ganze Zahlen.

   Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

   $$x^k f(y) - y^n f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

   für alle reellen Zahlen x und y mit $x \neq 0$.

   (Walther Janous)

2. Sei ABC ein Dreieck mit $AC < BC$. Der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle ACB$ mit der Streckensymmetrale von AC sei L, der Mittelpunkt der Seite BC sei M und der Mittelpunkt desjenigen Umkreisbogens zwischen A und B, der C enthält, sei N.

   Man zeige, dass LMN ein rechtwinkliges Dreieck ist.

   (Karl Czakler)

3. Anna und Bertha spielen zwei Spiele auf einem regelmäßigen 2025-Eck, das Dreiecksspiel und das Vierecksspiel. Bei beiden Spielen wird in jedem Spielzug eine Diagonale des 2025-Ecks eingezeichnet, die noch nicht vorhanden war und auch keine bereits vorhandene Diagonale in einem inneren Punkt schneidet. Die beiden wechseln sich ab, wobei Anna beginnt. Das Spiel endet, wenn keine weitere erlaubte Diagonale eingezeichnet werden kann.

   (a) Dreiecksspiel: Wenn durch das Einzeichnen der Diagonale ein oder zwei Dreiecke entstehen, dann markiert die Spielerin diese Dreiecke mit ihrem Anfangsbuchstaben. Wer am Ende die meisten Dreiecke markiert hat, gewinnt. Bei Gleichstand endet das Spiel unentschieden. Hat Anna oder hat Bertha eine Gewinnstrategie oder endet das Spiel bei optimalem Spiel unentschieden?

   (b) Vierecksspiel: Wenn durch das Einzeichnen der Diagonale ein oder zwei nicht unterteilte Vierecke entstehen, dann markiert die Spielerin diese Vierecke mit ihrem Anfangsbuchstaben. Solche Vierecke dürfen danach nicht mehr mit einer Diagonale unterteilt werden. Wer am Ende die meisten Vierecke markiert hat, gewinnt. Bei Gleichstand endet das Spiel unentschieden. Hat Anna oder hat Bertha eine Gewinnstrategie oder endet das Spiel bei optimalem Spiel unentschieden?

   (Theresia Eisenkölbl)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

56. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

29. Mai 2025

4. Sei n eine positive ganze Zahl und seien a_1, a_2, $\ldots$, a_n positive reelle Zahlen mit $a_1 a_2 \cdots a_n = 2^n$. Man beweise, dass

$$a_1^2 + a_1 a_2^2 + a_1 a_2 a_3^2 + \ldots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n^2 \geq 4(2^n - 1)$$

gilt, und man gebe an, wann Gleichheit eintritt.

(Karl Czakler)

5. Sei ABC ein Dreieck. Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ liege der Punkt D_n auf der Strecke CB mit $CD_n = \frac{1}{n} CB$ sowie der Punkt E_n auf der Strecke CA mit $CE_n = \frac{1}{n+1} CA$.

Man beweise, dass die Geraden $D_n E_n$ alle durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

(Walther Janous)

6. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die es positive ganze Zahlen

$$z_1 < z_2 < \cdots < z_n$$

mit $\operatorname{ggT}(z_j, z_k) = z_k - z_j$ für alle j und k mit $1 \leq j < k \leq n$ gibt.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2025`