56. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

3. April 2025

Aufgabe 1. *Sei $n \geq 3$ eine positive ganze Zahl.*

Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in [0, 2]$ mit $x_1 + \ldots + x_n = 5$ die Ungleichung

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 9$$

gilt. Wann gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

Antwort. Gleichheit gilt, wenn zwei Zahlen 2 sind, eine Zahl 1 ist und die übrigen Zahlen 0 sind

Lösung 1. Nehmen wir zunächst an, dass zwei (oder mehr) der x_i im Inneren des Intervalls $[0, 2]$ liegen, also etwa die Werte a und b mit $0 < a \leq b < 2$ annehmen.

Sei nun $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl, sodass $0 \leq a - \varepsilon < b + \varepsilon \leq 2$ gilt. Wir ersetzen nun die beiden Werte a und b durch $a - \varepsilon$ und $b + \varepsilon$. Die Summe der x_i ändert sich dadurch natürlich nicht. In der Summe der Quadrate haben wir

$$(a - \varepsilon)^2 + (b + \varepsilon)^2 = a^2 + b^2 + 2(b - a)\varepsilon + \varepsilon^2 > a^2 + b^2.$$

Somit wird die Summe der Quadrate größer und es reicht daher, die gewünschte Ungleichung für die neuen Werte der x_i zu zeigen.

Wir können nun aber das ε so groß machen, dass einer der beiden neuen Werte an den Rand des Intervalls kommt. Diesen Schritt können wir solange wiederholen, bis höchstens ein x_i im Inneren des Intervalls liegt, während die restlichen die Werte 0 oder 2 annehmen müssen.

Es reicht also, die Ungleichung für den Fall zu beweisen, dass höchstens eines der x_i im Inneren des Intervalls liegt. Wenn unter den anderen Werten drei oder mehr Zweier wären, dann wäre die Summe der x_i größer als 5, das ist also nicht möglich. Wenn unter den anderen Werten höchstens ein Zweier wäre, dann wäre der übrige Term mindestens 3, was auch nicht möglich ist.

Somit gibt es also genau zwei Zweier unter den anderen Werten und das verbliebene x_i muss den Wert 1 haben, um die Summe auf 5 zu ergänzen.

Wir müssen also nur noch überprüfen, dass

$$1^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + \cdots + 0^2 \leq 9.$$

Das ist natürlich richtig und Gleichheit wird hier angenommen. Da beim Verschieben immer eine strikte Ungleichung gegolten hat, ist das bis auf Permutation der x_i der einzige Gleichheitsfall.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Wir bemerken zuerst, dass für reelle Zahlen ξ aus dem Intervall $[0, 1]$ die Ungleichung $\xi^2 \leq \xi$ gilt (mit Gleichheit genau für $\xi = 0$ oder $\xi = 1$).

Wir ordnen die n Zahlen so, dass o. B. d. A. $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 2$ gilt, und unterscheiden im Weiteren einige Fälle.

(a) Für $x_n < 1$ muss x_n positiv sein und es gilt

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 < \sum_{j=1}^{n} x_j = 5.$$

(b) Bei $x_{n-1} < 1 \le x_n$ muss x_{n-1} positiv sein und wir haben

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 < x_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} x_j = x_n^2 + 5 - x_n = 5 + x_n(x_n - 1) \le 5 + 2 \cdot 1 = 7.$$

(c) Für $x_{n-2} < 1 \le x_{n-1}$ muss x_{n-2} positiv sein. Deshalb folgt

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 < x_n^2 + x_{n-1}^2 + \sum_{j=1}^{n-2} x_j = x_n^2 + x_{n-1}^2 + 5 - x_n - x_{n-1}.$$

Somit gilt

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 < 5 + x_n(x_n - 1) + x_{n-1}(x_{n-1} - 1).$$

und wir haben deshalb

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 < 5 + 2(x_n - 1 + x_{n-1} - 1) = 1 + 2(x_n + x_{n-1}) \le 1 + 2 \cdot (2 + 2) = 9.$$

(d) Da sich für $x_{n-3} < 1 \le x_{n-2}$ nur noch $x_{n-3} \ge 0$ ergibt, erhalten wir in entsprechender Weise wie zuerst

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le 5 + x_n(x_n - 1) + x_{n-1}(x_{n-1} - 1) + x_{n-2}(x_{n-2} - 1)$$

und damit

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le 5 + 2(x_n - 1 + x_{n-1} - 1 + x_{n-2} - 1) \le 5 + 2 \cdot (5 - 3) = 9. \quad (*)$$

Für Gleichheit muss deshalb $x_n = 2$ sein. Im Fall von $x_{n-1} < 2$ wäre aber die in $(*)$ vorkommende Summe kleiner als der Mittelterm. Folglich müssen $x_{n-1} = 2$ und damit $x_{n-2} = 1$ sein. Die restlichen Zahlen x_j, $j = 1, \ldots, n-3$, sind dann 0.

(e) Bei $x_{n-4} < 1 \le x_{n-3}$ erhält man wie zuerst

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le 5 + 2(x_n - 1 + x_{n-1} - 1 + x_{n-2} - 1 + x_{n-3} - 1) \le 5 + 2 \cdot (5 - 4) = 7.$$

(f) Wenn fünf Summanden ≥ 1 sind, müssen sie alle den Wert 1 haben. Die übrigen sind dann 0. Folglich gilt

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 5.$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen. In ihr gilt Gleichheit, wenn zwei Zahlen 2 sind, eine Zahl 1 ist und die übrigen Zahlen 0 sind

(Walther Janous) □

Lösung 3. Wir ordnen die n Zahlen o. B. d. A. in der Form $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n$. Wegen $9 = 4 + 5$ lautet die Ungleichung in äquivalenter Form

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \le 4 + \sum_{j=1}^{n} x_j,$$

d. h. $S \leq 4$ mit

$$S = \sum_{j=1}^{n} x_j(x_j - 1).$$

Die weiteren Überlegungen verwenden den Verlauf der Parabel $p(x) = x(x-1)$ über dem Intervall $[0, 2]$, insbesondere $p(x) = 2 \iff x = 2$, $p(x) = 0 \iff x \in \{0, 1\}$ und $p(x) < 0 \iff x \in (0, 1)$.

Für $x_1 \leq 1$ haben wir $S \leq 0$. Sei $k \geq 1$ jener Index mit $x_k > 1$ und $x_{k+1} \leq 1$. Wegen $5 = \sum_{j=1}^{n} x_j \geq x_1 + \ldots + x_k > k$ gilt $k \leq 4$.

- $k = 1$ führt auf $S \leq 2$.
- $k = 2$ ergibt $S \leq 2 + 2 = 4$ mit Gleichheit für $x_1 = x_2 = 2$ und $p(x_j) = 0$, $j = 3, \ldots, n$. Deshalb folgt via $\sum_{j=1}^{n} x_j = 5$, dass $x_3 = 1$ und $x_4 = \ldots = x_n = 0$.
- Für $k = 3$ ist $S \leq x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1) + x_3(x_3 - 1)$. Folglich gilt $S \leq 2(x_1 - 1 + x_2 - 1 + x_3 - 1) \leq 2 \cdot (5 - 3) = 4$. In der ersten Ungleichung müsste für Gleichheit $x_1 = x_2 = x_3 = 2$ sein, im Widerspruch zu $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$.
- Für $k = 4$ ergibt sich in entsprechender Weise ein Widerspruch, weil nun $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ sein müsste.

Damit ist die Ungleichung bewiesen. In ihr gilt Gleichheit, wenn zwei Zahlen 2 sind, eine Zahl 1 ist und die übrigen Zahlen 0 sind

(Walther Janous) □

Aufgabe 2. *Sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$ und Umkreis k. Die Normale auf BC durch B wird mit n bezeichnet. Sei weiters M ein beliebiger, aber von B verschiedener, Punkt auf n. Der Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M und dem Radius BM schneide AB ein weiteres Mal im Punkt P und den Umkreis k ein weiteres Mal im Punkt Q.*

Man beweise, dass die Punkte P, Q und C auf einer Geraden liegen.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Sei $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = \alpha$.

Wir betrachten das Dreieck PQB mit dem Umkreis k_1. Mit dem Sehnen-Tangentensatzsatz gilt

$$\sphericalangle BPQ = \sphericalangle CBQ$$

und daher

$$\sphericalangle BPQ + \sphericalangle QBA = \sphericalangle CBQ + \sphericalangle QBA = \sphericalangle CBA = \alpha.$$

Über die Winkelsumme im Dreieck PQB folgt

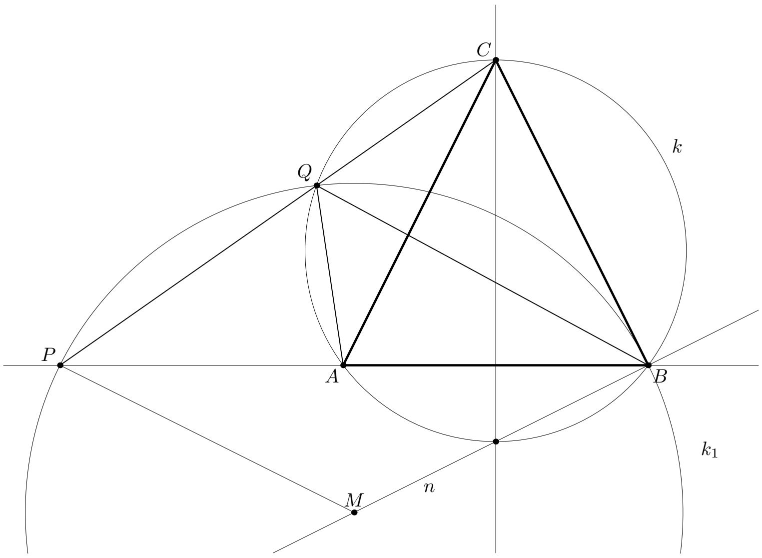
$$\sphericalangle PQB = 180^0 - \alpha.$$

Das Dreieck BQC hat den Umkreis k und mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\sphericalangle BQC = \sphericalangle BAC = \alpha.$$

Die Winkel PQB und BQC sind supplementär und daher liegen die Punkte P, Q und C auf einer Geraden.

(Karl Czakler) □



Lösung 2. Sei $\angle BAC = \sphericalangle CBA = \alpha$.

Das Dreieck BQC hat den Umkreis k und mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\sphericalangle BQC = \sphericalangle BAC = \alpha.$$

Da BM normal auf BC steht folgt $\sphericalangle ABM = 90^0 - \alpha$ und über die Winkelsumme im gleichschenkeligen Dreieck BMP folgt

$$\sphericalangle BMP = 2\alpha.$$

Da Q sicher auf dem kürzeren Kreisbogen von k_1 mit der Mitte M liegt, folgt nun mit dem Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle PQB = 180^0 - \alpha.$$

Die Winkel PQB und BQC sind supplementär und daher liegen die Punkte P, Q und C auf einer Geraden.

(Karl Czakler) □

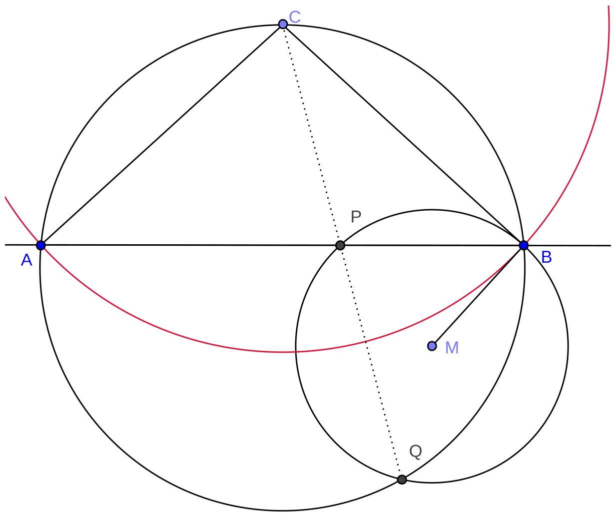


Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 3

Lösung 3. Wir betrachten die Inversion am Kreis ω mit Mittelpunkt C und Radius $CA = CB$. Die Gerade AB wird dabei auf den Umkreis k von ABC abgebildet. Der Kreis k_1 schneidet den Inversionskreis laut Angabe orthogonal, da die Radien MB und CB im Schnittpunkt B aufeinander orthogonal stehen. Somit wird k_1 durch die Inversion auf sich selbst abgebildet.

Insgesamt ergibt sich also, dass $P = k_1 \cap AB$ auf $Q = k_1 \cap k$ abgebildet wird. Somit geht die Gerade PQ natürlich durch das Inversionszentrum C wie gewünscht.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 3. *In einer Stadt gibt es* 6 *verschiedene Autobuslinien, wobei jede genau in* 5 *Stationen hält und in beide Richtungen verkehrt. Trotzdem gibt es für je zwei verschiedene Stationen immer eine Autobuslinie, die diese beiden Stationen miteinander verbindet. Man bestimme die maximale Anzahl von Stationen dieser Stadt.*

(Karl Czakler)

Lösung 1. Es gibt insgesamt $6 \cdot 5 = 30$ Autobushalte. Jeder Autobus der in einer Station hält, hält noch in vier weiteren. Sind also mehr als $5 = 1 + 4$ Busstationen vorhanden, müssen in jeder Station mindestens zwei Linien halten. Sind mehr als $9 = 1 + 4 + 4$ Busstationen vorhanden, müssen in jeder Station mindestens drei Linien halten. Sei n die Anzahl der Stationen. Es gilt die Ungleichung

$$3n \leq 30,$$

also

$$n \leq 10.$$

Es kann also höchstens 10 Autobusstationen geben. Um zu zeigen, dass das tatsächlich möglich ist, bezeichnen wir die Linien mit $1, 2, \cdots 6$ und die Stationen mit $A, B, \cdots J$. Ein möglicher Fahrplan ist dann:

Linie	Stationen				
1	A	B	C	D	E
2	A	B	F	G	H
3	A	B	C	I	J
4	C	D	F	G	H
5	D	E	H	I	J
6	E	F	G	I	J

(Karl Czakler) □

Lösung 1a. Eine weitere Möglichkeit, ein Busnetz zu konstruieren, besteht darin, die 10 Stationen in drei Paare P_1, P_2, P_3 sowie vier Einzelstationen E_1, E_2, E_3 und E_4 aufzuteilen.

Ein mögliches Busnetz ist dann

- Linie 1: P_1, P_2, E_3
- Linie 2: P_2, P_3, E_1
- Linie 3: P_3, P_1, E_2
- Linie 4: P_1, E_1, E_4, E_2
- Linie 5: P_2, E_2, E_4, E_3
- Linie 6: P_3, E_3, E_4, E_1

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Sei z eine positive ganze Zahl, die nicht durch 8 teilbar ist. Weiters sei $n \geq 2$ eine positive ganze Zahl.*

Man beweise, dass keine der Zahlen der Form $z^n + z + 1$ eine Quadratzahl ist.

(Walther Janous)

Lösung. Wir untersuchen das Problem modulo 8 und betrachten die Folgen $R(z) = (z^n + z + 1 \pmod 8)_{n\geq 2}$ für $z \equiv 1, 2, \ldots, 7$:

- Für $z \equiv 1 \pmod 8$ ist $R(1) = (3, 3, 3, \ldots)$.
- Für $z \equiv 2 \pmod 8$ ist $R(2) = (7, 3, 3, 3, \ldots)$.
- Für $z \equiv 3 \pmod 8$ ist $R(3) = (5, 7, 5, 7, 5, 7, \ldots)$.
- Für $z \equiv 4 \pmod 8$ ist $R(4) = (5, 5, 5, \ldots)$.
- Für $z \equiv 5 \pmod 8$ ist $R(5) = (7, 3, 7, 3, 7, 3, \ldots)$.
- Für $z \equiv 6 \pmod 8$ ist $R(6) = (3, 7, 7, 7, \ldots)$.
- Für $z \equiv 7 \pmod 8$ ist $R(7) = (1, 7, 1, 7, 1, 7, \ldots)$.

Da die quadratischen Reste modulo 8 die Reste $0, 1, 4$ sind, bleibt nur der Fall $z \equiv 7 \pmod 8$ für gerade n zu untersuchen. In allen anderen Fällen kann $z^n + z + 1$ kein Quadrat sein.

Sei nun $n = 2k$ (mit einer positiven ganzen Zahl k). Dann ist aber

$$z^{2k} < z^{2k} + z + 1 < z^{2k} + 2z^k + 1 = (z^k + 1)^2,$$

also ist $z^n + z + 1$ strikt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen und kann deshalb keine Quadratzahl sein.

Daher ist $z^n + z + 1$ (für $n \geq 2$ und $z \not\equiv 0 \bmod 8$) in keinem Fall eine Quadratzahl.

(Walther Janous) □