Dienstag, 16. Juli 2024

Aufgabe 1. Man bestimme alle reellen Zahlen α, sodass für jede positive ganze Zahl n die ganze Zahl

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

ein Vielfaches von n ist.

(Dabei bezeichnet $\lfloor z \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich z. Beispielsweise gilt $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ und $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Aufgabe 2. Man bestimme alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, für die es positive ganze Zahlen g und N gibt, sodass

$$\operatorname{ggT}(a^n + b,\, b^n + a) = g$$

für alle ganzen Zahlen $n \geqslant N$ gilt.

(Dabei bezeichnet $\operatorname{ggT}(x, y)$ den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen x und y.)

Aufgabe 3. Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine unendliche Folge positiver ganzer Zahlen, und es sei N eine positive ganze Zahl. Für jedes $n > N$ komme die Zahl a_{n-1} unter $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ genau a_n mal vor.

Man beweise, dass mindestens eine der Folgen $a_1, a_3, a_5, \ldots$ und $a_2, a_4, a_6, \ldots$ ab einer gewissen Stelle periodisch ist.

(Eine unendliche Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ist *ab einer gewissen Stelle periodisch*, falls es positive ganze Zahlen p und M gibt, sodass $b_{m+p} = b_m$ für alle $m \geqslant M$ gilt.)

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Mittwoch, 17. Juli 2024

Aufgabe 4. Es sei ABC ein Dreieck mit $AB < AC < BC$. Weiterhin seien I der Inkreismittelpunkt und ω der Inkreis des Dreiecks ABC. Sei X der von C verschiedene Punkt auf der Geraden BC, sodass die Parallele zu AC durch X den Kreis ω berührt. Analog sei Y der von B verschiedene Punkt auf der Geraden BC, sodass die Parallele zu AB durch Y den Kreis ω berührt. Die Gerade AI schneide den Umkreis des Dreiecks ABC erneut in $P \neq A$. Es seien K und L die Mittelpunkte von AC beziehungsweise AB.

Man beweise, dass $\angle KIL + \angle YPX = 180°$ gilt.

Aufgabe 5. Die Schnecke Turbo spielt auf einem Brett mit 2024 Zeilen und 2023 Spalten. Auf 2022 Feldern befinden sich versteckte Monster. Zu Beginn weiß Turbo nicht, wo sich Monster befinden, aber sie weiß, dass es in jeder Zeile, außer der ersten und der letzten, genau ein Monster gibt und dass es in jeder Spalte höchstens ein Monster gibt.

Turbo unternimmt eine Reihe von Versuchen, von der ersten Zeile zur letzten Zeile zu gelangen. In jedem Versuch wählt sie ein Startfeld in der ersten Zeile und kriecht dann wiederholt auf ein Nachbarfeld mit einer gemeinsamen Seite. (Sie darf auf bereits besuchte Felder zurückkehren.) Wenn sie auf ein Feld mit einem Monster kommt, dann endet der Versuch und sie muss in der ersten Reihe einen neuen Versuch beginnen. Die Monster bleiben immer am selben Ort, und Turbo merkt sich für jedes besuchte Feld, ob dort ein Monster ist oder nicht. Wenn sie ein Feld in der letzten Zeile erreicht, dann endet ihr Versuch und das Spiel endet.

Man bestimme das kleinstmögliche n, für das Turbo eine Strategie hat, sicher in höchstens n Versuchen die letzte Zeile zu erreichen, unabhängig von der Position der Monster.

Aufgabe 6. Es sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Eine Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ heißt *aquäsulisch*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad \text{oder} \qquad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Man zeige, dass es eine ganze Zahl c gibt, sodass es für jede aquäsulische Funktion f höchstens c verschiedene rationale Zahlen der Form $f(r) + f(-r)$ mit rationalem r gibt, und man bestimme den kleinstmöglichen Wert für ein solches c.

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.