55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale – Lösungen

29./30. Mai 2024

Aufgabe 1. *Man bestimme die kleinste Konstante C, sodass für alle reellen Zahlen X und Y die Ungleichung*

$$(X+Y)^2(X^2+Y^2+C)+(1-XY)^2 \geq 0$$

erfüllt ist.

Für welche Werte von X und Y wird mit dieser kleinsten Konstanten C in der Ungleichung Gleichheit angenommen?

(Walther Janous)

Antwort. Die kleinste Konstante ist $C=-1$. Gleichheit ergibt sich für $X=Y=1/\sqrt{3}$ oder $X=Y=-1/\sqrt{3}$.

Lösung 1. Im Fall von $X+Y=0$ erhalten wir die allgemein gültige Aussage $(1-XY)^2 \geq 0$ ohne Gleichheit. Sei deshalb im Weiteren $X+Y \neq 0$. Weil unsere Ungleichung symmetrisch in X und Y ist, hoffen wir den Minimalwert von C über $X=Y$ bestimmen zu können. Dafür ergibt sich

$$4X^2(2X^2+C)+(1-X^2)^2 \geq 0,$$

also nach kurzer Vereinfachung

$$9X^4+(4C-2)X^2+1 \geq 0.$$

Wegen $9X^4+(4C-2)X^2+1=(3X^2-1)^2+4(C+1)X^2$ muss $C+1 \geq 0$, also $C \geq -1$ gelten, wie $X^2=1/3$ zeigt. Wir beweisen nun

$$(1-XY)^2 \geq (X+Y)^2(1-(X^2+Y^2))$$

für alle reellen Zahlen X und Y. Für $X^2+Y^2 \geq 1$ ist die rechte Seite nicht positiv, die linke jedoch nicht negativ und es ist nichts zu zeigen. (Für Gleichheit müsste $Y=1/X$ gelten. Dafür nimmt aber, wie man leicht nachrechnet, die rechte Seite niemals den Wert 0 an.) Damit können wir ab jetzt von $X^2+Y^2<1$ ausgehen. Wir setzen $s:=(X^2+Y^2)/2$. Nach der geometrisch-quadratischen bzw. der arithmetisch-quadratischen Mittelungleichung gelten $XY \leq s$ sowie $(X+Y)^2 \leq 4s$, wobei sich Gleichheit genau für $X=Y$ ergibt. (In diesen Fassungen gelten die Mittelungleichungen auch für beliebige reelle Zahlen.) Damit ist $1-XY \geq 1-s > 1/2$ und wir können deshalb die zu beweisende Ungleichung zu

$$(1-s)^2 \geq 4s(1-2s)$$

verschärfen, was zu

$$9s^2-6s+1 \geq 0$$

äquivalent ist. Weil die linke Seite $(3s-1)^2$ ist, ist alles gezeigt. Außerdem ergibt sich Gleichheit nur für $s=1/3$. Für $X \neq Y$ ergäben sich aber $XY<1/3$ und $(X+Y)^2<4/3$. Deshalb wäre die linke Seite unserer Ungleichung größer als die rechte. Schließlich führen $X=Y$ und $X^2=1/3$ auf $X=Y=1/\sqrt{3}$ oder $X=Y=-1/\sqrt{3}$ als einzige Gleichheitsfälle.

(Clemens Heuberger, Walther Janous) □

Lösung 2. Wie in den anderen Lösungen untersucht man $X = Y$, um zur Vermutung $C = -1$ zu kommen. Da die Ungleichung für den Fall $X = Y$ zu $(3X^2 - 1)^2 \geq 0$ wird, versuchen wir jetzt mit X und Y drei Terme vom Grad 2 zu bilden, um $3X^2$ zu ersetzen.

Nach Ausrechnen von $(X^2 + XY + Y^2 - 1)^2$ sieht man, dass die Ungleichung äquivalent zu

$$(X^2 + XY + Y^2 - 1)^2 + (X - Y)^2 \geq 0$$

ist. Das ist natürlich wahr und liefert auch sofort die beiden Gleichheitsfälle.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 3. • Für $X + Y = 0$ erhalten wir die allgemein gültige Aussage $(1 - XY)^2 \geq 0$ ohne Gleichheit. Sei deshalb im Folgenden $X + Y \neq 0$. Unsere Ungleichung ist symmetrisch in X und Y. Deshalb hoffen wir, dass sich der Minimalwert von C über $X = Y$ ergibt. Dafür erhalten wir

$$4X^2(2X^2 + C) + (1 - X^2)^2 \geq 0,$$

also (wegen $X \neq 0$)

$$-C \leq \frac{(1 - X^2)^2}{4X^2} + 2X^2 \iff -C \leq \frac{1}{4}\left(9X^2 + \frac{1}{X^2}\right) - \frac{1}{2}.$$

Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung folgt

$$9X^2 + \frac{1}{X^2} \geq 6$$

mit Gleichheit genau für $X^2 = 1/3$. Deshalb haben wir

$$-C \leq \frac{6}{4} - \frac{1}{2} \iff C \geq -1.$$

Wir beweisen nun, dass die symmetrische Ungleichung

$$(X + Y)^2(X^2 + Y^2 - 1) + (1 - XY)^2 \geq 0$$

für alle reellen Zahlen X und Y erfüllt ist.

- Für beispielsweise $X = 0$ erhalten wir $Y^4 - Y^2 + 1 \geq 0$, eine wegen $Y^4 - Y^2 + 1 = (Y^2 - 1)^2 + Y^2$ allgemein gültige Ungleichung, in der niemals Gleichheit eintreten kann.

- Für $X \neq 0$ gibt es für jede reelle Zahl Y eine reelle Zahl λ mit $Y = \lambda X$. Damit erhalten wir für unsere Ungleichung

$$X^2(\lambda + 1)^2(X^2(\lambda^2 + 1) - 1) + (1 - \lambda X^2)^2 \geq 0, \text{ also}$$

$$X^4((\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 1) + \lambda^2) - X^2(((\lambda + 1)^2 + 2\lambda) + 1 \geq 0, \text{ d.h.}$$

$$X^4(\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1) - X^2(\lambda^2 + 4\lambda + 1) + 1 \geq 0.$$

Für die Diskriminante Δ der auf der linken Seite der letzten Ungleichung auftretenden quadratischen Funktion in der Variablen X^2 gilt

$$\Delta = (\lambda^2 + 4\lambda + 1)^2 - 4(\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1),$$

d.h., wie eine kurze Vereinfachung zeigt,

$$\Delta = \lambda^4 + 8\lambda^3 + 18\lambda^2 + 8\lambda + 1 - 4\lambda^4 - 8\lambda^3 - 12\lambda^2 + 8\lambda - 4, \text{ also}$$

$$\Delta = -3\lambda^4 + 6\lambda^2 - 3 = -3(\lambda^2 - 1)^2 \leq 0.$$

Damit sind wir am Ende des Beweises.

Außerdem ergibt sich noch, dass Gleichheit nur für $\lambda^2 = 1$, also $\lambda \in \{-1, +1\}$, eintreten kann.

- Für $\lambda = -1$, also $Y = -X$, lautet die in Rede stehende Ungleichung
$$(X^2 + 1)^2 \geq 0$$
und es kann sich niemals Gleichheit ergeben.

- Für $\lambda = 1$, also $Y = X$, erhalten wir die Ungleichung
$$9X^4 - 6X^2 + 1 \geq 0, \text{ also } (3X^2 - 1)^2 \geq 0.$$
Deshalb tritt Gleichheit genau dann auf, wenn $X = Y = 1/\sqrt{3}$ oder $X = Y = -1/\sqrt{3}$.

(Walther Janous) □

Lösung 4. Wie in den anderen Lösungen erhalten wir über $X = Y$ die Vermutung, dass $C = -1$ sein muss. Wir beweisen nun die Ungleichung

$$(X + Y)^2(X^2 + Y^2 - 1) + (1 - XY)^2 \geq 0$$

für alle reellen Zahlen X und Y. Im Fall von $X^2+Y^2 > 1$ ist dies klar. Dabei ist Gleichheit ausgeschlossen. Sei deshalb $X^2 + Y^2 \leq 1$. Mit $q := X^2 + Y^2$ und $p := XY$ lautet unsere Ungleichung

$$(q + 2p)(q - 1) + (1 - p)^2 \geq 0 \iff f(p) \geq 0$$

mit $f(p) := p^2 - 2(2 - q)p + q^2 - q + 1$. (Dabei gilt wegen $2XY \leq X^2 + Y^2$, dass $p \leq q/2$.) Die (nach oben offene) Parabel $f(p)$ hat ihren Scheitel bei $p_0 = 2 - q$. Wegen $q/2 < p_0$ genügt somit der Nachweis von $f(q/2) \geq 0$. Es ist aber

$$f\left(\frac{q}{2}\right) = \frac{q^2}{4} - q(2 - q) + q^2 - q + 1 = \frac{1}{4}(9q^2 - 12q + 4) = \frac{1}{4}(3q - 2)^2.$$

Gleichheit ergibt sich dabei genau für $q = 2/3$ und damit $p = 1/3$. Daraus erhalten wir über

$$q - 2p = 0 \iff (X - Y)^2 = 0 \iff X = Y,$$

dass $X^2 = 1/3$. Deshalb sind $X = Y = 1/\sqrt{3}$ oder $X = Y = -1/\sqrt{3}$ die einzigen Gleichheitsfälle.

(Walther Janous) □

Aufgabe 2. *Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB > AC$. Die Punkte D, E und F seien die Höhenfußpunkte auf BC, AC bzw. AB. Der Schnittpunkt der Geraden EF und BC sei S.*

Man beweise, dass die Umkreise k_1 und k_2 der Dreiecke AEF und DES einander in E berühren.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Sei M der Halbierungspunkt der Seite BC, O der Mittelpunkt von k_1 und H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Nach dem Satz von Thales geht der Umkreis des Dreiecks AEF auch durch H, und da HE normal auf AE steht, ist O der Halbierungspunkt der Strecke AH.

Die Punkte O, E, D, M und F liegen auf dem Feuerbachkreis k des Dreiecks ABC. Da OD normal auf DM steht, ist OM ein Durchmesser des Feuerbachkreises. Daher ist auch OE normal auf EM (Thales) und es folgt, dass M auf der Tangente in E an k_1 liegt.

Es genügt nun

$$ME^2 = MD \cdot MS \iff ME : MS = MD : ME,$$

also die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke MES und MDE zu zeigen, denn dann ist ME auch ein Tangente an k_2 (Satz über die Potenz eines Punktes).

Die Dreiecke CME und FMB sind gleichschenkelig und damit ergeben sich folgende Winkelbeziehungen:

$$\begin{aligned} \angle MES &= \angle MEC + \angle CES = \angle ECM + \angle AEF \\ &= \angle ACB + \angle AHF = \angle ACB + \angle CBA \end{aligned}$$

und, mittels des Peripheriewinkelsatzes im Feuerbachkreis,

$$\begin{aligned} \angle EDM &= 180^\circ - \angle MFE = \angle BFM + \angle EFA \\ &= \angle MBF + \angle EHA = \angle CBA + \angle ACB. \end{aligned}$$

Also gilt $\angle MES = \angle EDM$, und mit $\angle DME = \angle EMS$ folgt die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke.

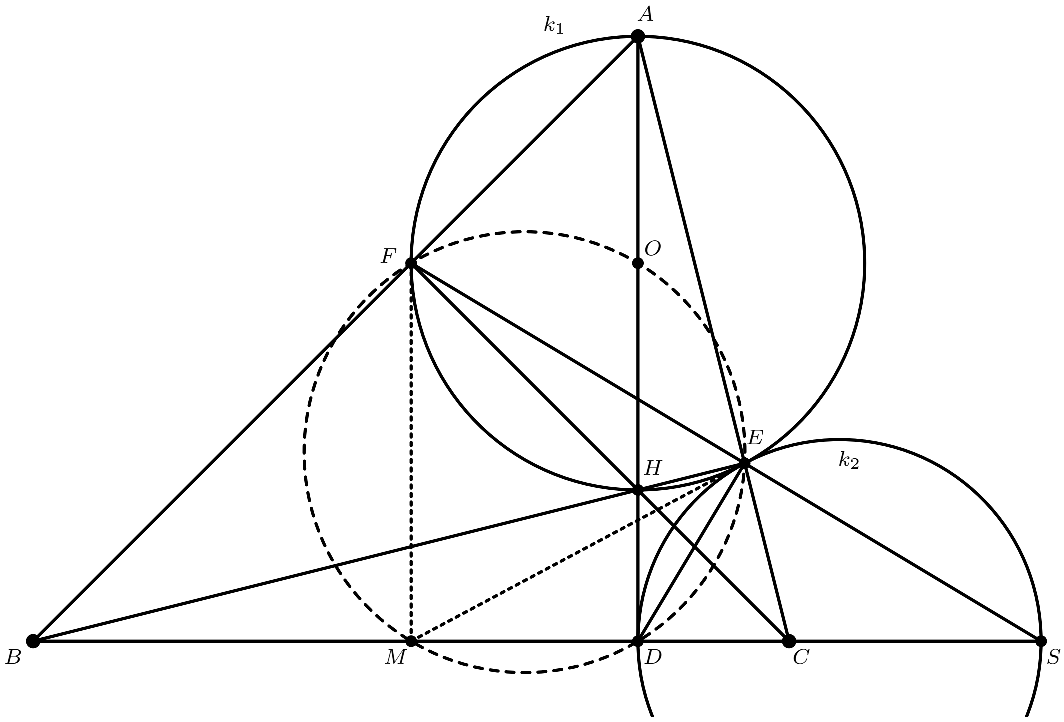

Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 2, Lösung 1

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Sei t_1 die Tangente an k_1 im Punkt E und sei t_2 die Tangente an k_2 im Punkt E.

Nach dem Tangenten-Sekanten-Satz im Kreis k_1 gilt

$$\sphericalangle(EF, t_1) = \sphericalangle FAE = \alpha$$

mit der üblichen Notation für die Winkel im Dreieck ABC.

Nach dem Tangenten-Sekanten-Satz im Kreis k_2 gilt

$$\sphericalangle(EF, t_2) = \sphericalangle SDE = \sphericalangle CDE = \alpha,$$

wobei sich die letzte Gleichung aus dem Sehnenviereck $ABDE$ ergibt, da ja alle diese vier Punkte auf dem Thaleskreis über AB liegen.

Somit sind t_1 und t_2 parallel und gehen beide durch den Punkt E. Da die Kreise also eine gemeinsame Tangente haben, berühren sie einander.

(Theresia Eisenkölbl) □

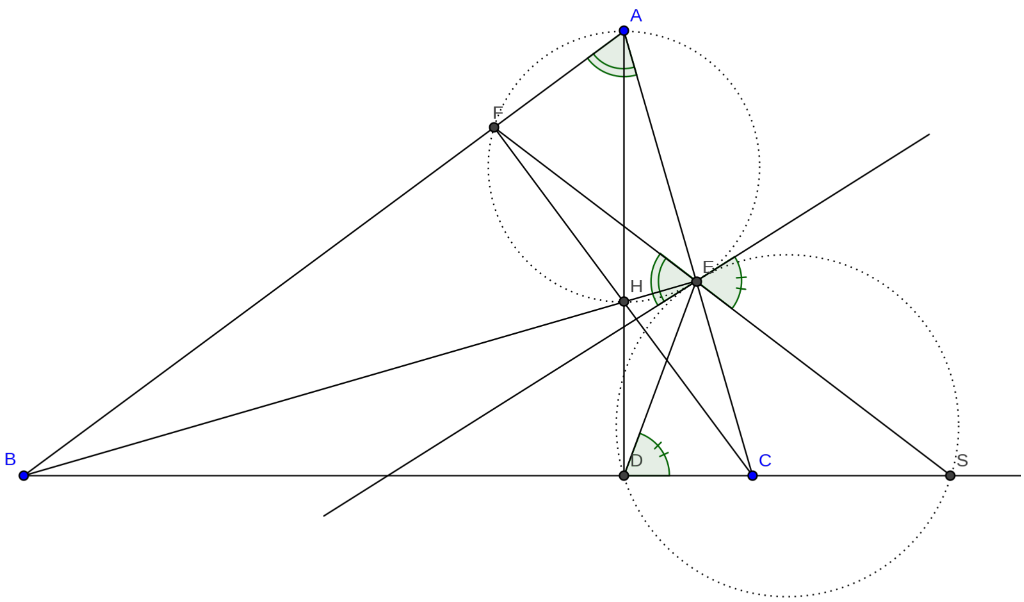

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 2

Aufgabe 3. *Am Anfang stehen die Zahlen* 1, 2, …, 2024 *an einer Tafel. Trixi und Nana spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd am Zug sind. Trixi beginnt.*

Wer am Zug ist, wählt zwei Zahlen a und b aus, löscht beide, und schreibt deren (möglicherweise negative) Differenz $a-b$ an die Tafel. Dies wird so lange wiederholt, bis nach 2023 *Schritten nur noch eine einzige Zahl an der Tafel steht. Trixi gewinnt, wenn diese Zahl durch* 3 *teilbar ist, andernfalls gewinnt Nana.*

Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

(Birgit Vera Schmidt)

Lösung 1. Nana hat eine Gewinnstrategie.

Wir zeigen zunächst folgende Behauptung:

> *Lemma.* Trixi gewinnt dann und nur dann, wenn zu irgendeinem Zeitpunkt während des Spiels nur noch Zahlen auf der Tafel stehen, die durch 3 teilbar sind.
>
> *Beweis.* Beweis: Sobald alle Zahlen auf der Tafel durch 3 teilbar sind, sind auch deren Differenzen immer durch 3 teilbar, also wird nie wieder eine Zahl an der Tafel stehen, die nicht durch 3 teilbar ist. Somit ist auch die letzte Zahl durch 3 teilbar.
>
> Umgekehrt folgt, wenn Trixi gewinnt, dann ist spätestens nach dem letzten Zug dieser Zustand erreicht. ∎

Wir nennen einen Zustand, in dem alle Zahlen an der Tafel kongruent 0 modulo 3 sind, ab jetzt einen „Alles-Null-Zustand“.

Nana kann also gewinnen, wenn sie dauerhaft verhindern kann, selbst einen Alles-Null-Zustand herzustellen oder Trixi eine Situation zu überlassen, von der aus dies in einem Zug möglich ist. (Wir halten der Vollständigkeit halber fest, dass zu Beginn alle Restklassen etwa gleich oft vertreten sind und somit nicht schon von Beginn an ein Alles-Null-Zustand vorliegt.)

Wir betrachten in Tabelle 1 alle möglichen Züge und wie sich diese auf die Anzahl der Zahlen in jeder Restklasse modulo 3 auswirken.

Wir suchen nun Züge, nach denen ein Alles-Null-Zustand vorliegen kann. Die letzten sechs Zugmöglichkeiten in der Tabelle kommen dafür nicht in Frage, da sie jeweils eine Zahl kongruent 1 oder

Zug	**Anzahl** $\equiv 0 \pmod 3$	**Anzahl** $\equiv 1 \pmod 3$	**Anzahl** $\equiv 2 \pmod 3$
$0-0=0$	-1	0	0
$1-1=0$	$+1$	-2	0
$2-2=0$	$+1$	0	-2
$0-1=2$	-1	-1	$+1$
$0-2=1$	-1	$+1$	-1
$2-0=2$	-1	0	0
$1-0=1$	-1	0	0
$1-2=2$	0	-1	0
$2-1=1$	0	0	-1

Tabelle 1: Zugmöglichkeiten

2 modulo 3 hinzufügen. (Dies ließe sich auch ohne die Tabelle leicht argumentieren: Wenn man zwei Zahlen verschiedener Restklassen voneinander abzieht, kommt dabei nie 0 heraus.)

Die Zugmöglichkeit $0-0=0$ führt nur dann zu einem Alles-Null-Zustand, wenn dieser bereits davor bestand, da keine Zahlen aus den Restklassen 1 oder 2 entfernt werden.

Somit können nur die Möglicheiten $1-1=0$ oder $2-2=0$, die jeweils zwei Zahlen derselben Restklasse entfernen und eine durch drei teilbare Zahl hinzufügen, einen Alles-Null-Zustand herstellen – und zwar genau dann, wenn zuvor noch genau zwei Zahlen dieser Restklasse und null Zahlen der anderen nicht durch 3 teilbaren Restklasse übrig waren.

Einen solchen Zustand, also entweder genau zwei Zahlen kongruent 1 und null Zahlen kongruent 2, oder zwei Zahlen kongruent 2 und null Zahlen kongruent 1, nennen wir einen „Knapp-Davor-Zustand“, da man (nur) von hier aus mit einem einzigen Zug auf einen Alles-Null-Zustand kommen kann.

Nana kann also gewinnen, wenn sie nie Trixi einen Knapp-Davor-Zustand überlässt und selbst in jedem Knapp-Davor-Zustand einen anderen Zug wählen kann.

Wir beschreiben nun Nanas Gewinnstrategie, indem wir folgende Fälle unterscheiden:

- Fall 1: Zu Beginn von Nanas Zug liegt ein Knapp-Davor-Zustand vor. Jedes Mal, wenn Nana am Zug ist, steht eine ungerade Anzahl von Zahlen an der Tafel. Wenn es genau zwei Zahlen x und y aus einer der Restklassen 1 oder 2 und null Zahlen aus der anderen dieser beiden Restklassen gibt, gibt es also zusätzlich mindestens eine durch 3 teilbare Zahl z. Nana kann daher die Differenz $z-x$ bilden und überlässt Trixi eine Situation mit genau einer Zahl kongruent 1 und genau einer Zahl kongruent 2 modulo 3. Dies ist weder selbst ein Alles-Null-Zustand noch ein Knapp-Davor-Zustand.

- Fall 2: Es tritt nicht Fall 1 ein, und zu Beginn von Nanas Zug ist noch mindestens eine Zahl kongruent 0 modulo 3 übrig. Dann kann Nana eine beliebige andere Zahl minus diese Zahl nehmen, dadurch verringert sich nur die Anzahl der Zahlen kongruent 0 modulo 3. Da vor ihrem Zug kein Knapp-Davor-Zustand vorlag, ist dies auch danach nicht der Fall (und wir haben auch keinen Zug gewählt, der auf einen Alles-Null-Zustand führen könnte).

- Fall 3: Es tritt keiner der bisherigen Fälle ein, d. h. es sind nur noch Zahlen kongruent 1 oder 2 modulo 3 übrig. Jedes Mal, wenn Nana am Zug ist, steht eine ungerade Anzahl von Zahlen an der Tafel (und mindestens drei, da das Spiel sonst bereits vorbei wäre). Nach Schubfachschluss sind mindestens zwei davon in derselben Restklasse. Nana zieht diese voneinander ab und erhält eine Zahl kongruent 0 modulo 3. Somit verringert sich die Anzahl der nicht durch 3 teilbaren Zahlen genau um zwei und ist damit weiterhin ungerade. Dies ist weder Alles-Null- noch Knapp-Davor-Zustand.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2. Da im Spiel nur die Restklasse modulo 3 eine Rolle spielt, werden wir im Folgenden die Zahlen nur als 0, 1 und 2 bezeichnen und stellen fest, dass am Anfang viele Nuller, Einser und Zweier vorhanden sind. Einser und Zweier bezeichnen wir gemeinsam auch als Nichtnuller.

Wir stellen nun fest, dass jeder Zug entweder die Anzahl der Nichtnuller unverändert lässt (wenn ein oder zwei Nuller im Zug involviert sind) oder die Anzahl der Nichtnuller um Eins oder Zwei senkt (wenn kein Nuller im Zug involviert ist).

Nana kann zu Beginn ziemlich lange spielen, wie sie will, während die Anzahl der Nichtnuller langsam sinkt, bis die Anzahl 1, 2, 3 oder 4 erreicht, wenn sie am Zug ist. Vorher kann sie nichts falsch machen, weil von 5 Nichtnullern nicht in zwei Zügen 0 Nichtnuller erreicht werden können.

Ist die Anzahl 4, so vermeidet es Nana, die Anzahl der Nichtnuller zu verringern, indem sie einen Zug mit ein oder zwei Nullern macht, bis Trixi endlich die Anzahl auf 2 oder 3 absenkt, was irgendwann passieren muss, da Trixi immer gerade viele Zahlen vor sich hat und daher als erste ohne Nuller dasteht, wenn es vier Nichtnuller gibt.

Wenn es drei Nichtnuller gibt, dann haben nach Schubfachschluss zwei davon denselben Wert, diese beiden kann Nana nehmen und durch einen Nuller ersetzen. Der dritte Nichtnuller bleibt alleine übrig und kann zwar zwischen 1 und 2 wechseln, aber bleibt ansonsten bis zum Ende liegen und Nana hat gewonnen.

Wenn es zwei Nichtnuller gibt, dann kann es sein, dass sie verschieden sind, dann ersetzt Nana sie durch einen Einser, der wieder bis zum Schluss als einziger Nichtnuller übrigbleibt.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass es zwei Nichtnuller gibt, die denselben Wert haben. Da Nana am Zug ist, wenn es ungerade viele Zahlen gibt, muss es mindestens einen Nuller geben, den sie dazu verwenden kann, die zwei Nichtnuller zu $(1, 2)$ zu ändern. Trixi kann jetzt weder diese beiden Zahlen verwenden, da sie dann wie in den anderen Fällen verloren hat, noch kann sie die Zahlen einfach stehen lassen, da sonst Nana wie im vorigen Fall vorgeht und gewonnen hat. Trixi muss also mit einem zusätzlichen Nuller die beiden Zahlen wieder auf zwei gleiche Werte ändern. Nana ändert sie dann wieder auf $(1, 2)$. Das geht so lange, bis Trixi nur mehr diese beiden Zahlen vor sich hat und gezwungen ist, sie durch ihre Differenz zu ersetzen, und verloren hat.

Wenn es einen Nichtnuller gibt, dann kann Nana nichts mehr falsch machen, weil dieser automatisch bis zum Ende liegenbleibt.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Sei ABC ein stumpfwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Schwerpunkt S. Die Mittelpunkte der Seiten BC, AC und AB seien mit D, E bzw. F bezeichnet. Man zeige, dass der Umkreis von ABC, der Umkreis von DEF und der Kreis mit Durchmesser HS durch zwei gemeinsame Punkte gehen.*

(Josef Greilhuber)

Lösung 1. Zunächst zeigen wir, dass die Umkreise von ABC und DEF, die wir im Folgenden mit Ω und Γ bezeichnen, einander schneiden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei A der Eckpunkt mit dem stumpfen Innenwinkel. Wir bezeichnen den Höhenfußpunkt von A auf BC mit K, das Spiegelbild von H an BC mit L, und den Mittelpunkt der Strecke AH mit M. Wegen dem stumpfen Winkel in A liegen die Punkte H, M, A, K und L in dieser Reihenfolge auf der Geraden HA. Der Kreis Γ ist der *Feuerbachkreis* des Dreiecks ABC, und verläuft daher durch K und M, während Ω durch A und L verläuft. Daher enthält das Innere jedes Kreises einen Punkt des jeweils anderen, also müssen sie einander schneiden.

Sei X einer der beiden Schnittpunkte von Ω und Γ. Wir zeigen, dass X auf dem Thaleskreis über HS liegt. Die zentrische Streckung in S mit Streckungsfaktor -2 sei Φ, und die zentrische Streckung in H mit Streckungsfaktor 2 sei Ψ. Beide bilden Γ auf Ω ab. Die Verkettung $\Phi \circ \Psi^{-1}$ ist eine zentrische Streckung mit Streckungsfaktor -1. Da sie außerdem Ω unverändert lässt, muss es sich um die Punktspiegelung um den Mittelpunkt O von Ω handeln. Also muss die Strecke zwischen $\Phi(X)$ und $\Psi(X)$ ein Durchmesser von Ω sein. Mit dem Satz von Thales folgt

$$90^\circ = \angle \Phi(X) X \Psi(X) = \angle HXS,$$

also liegt X auf dem Thaleskreis über HS, und genauso der zweite Schnittpunkt von Γ und Ω.

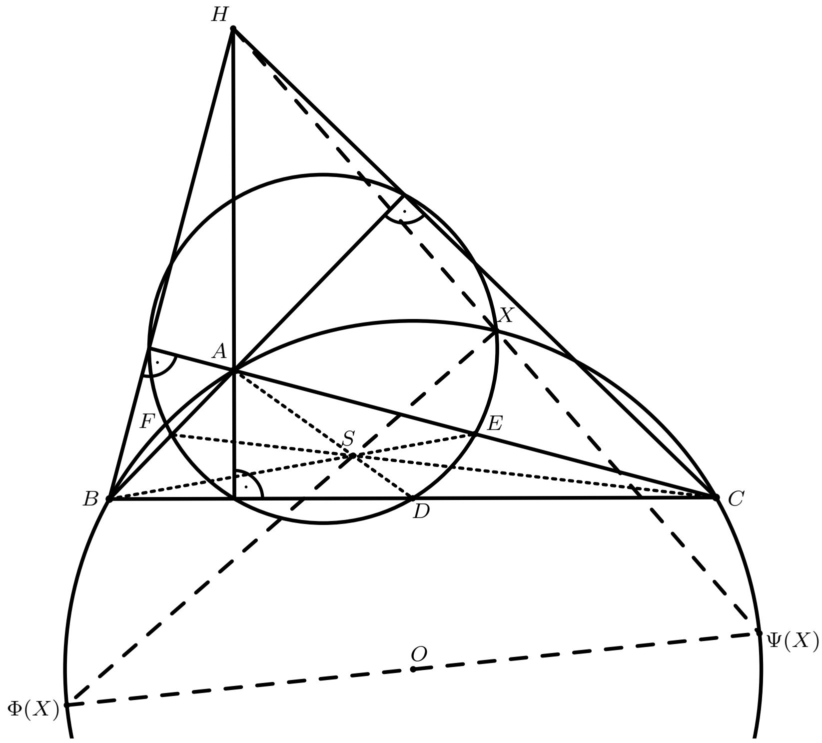

Abbildung 3: Skizze zu Aufgabe 4

(Josef Greilhuber) □

Lösung 2. Seien M und O die Umkreismittelpunkte der Dreiecke DEF bzw. ABC. Es ist bekannt, dass H, M, S und O in dieser Reihenfolge auf der *Euler-Geraden* des Dreiecks ABC liegen, und dass $HM : MS : SO = 3 : 1 : 2$ gilt.

Um das zu zeigen, betrachte man die zentrischen Streckungen in H und S mit den Streckfaktoren 2 bzw. -2. Beide bilden den Umkreis von DEF (den *Feuerbachkreis*) auf den Umkreis von ABC ab. Also liegen sowohl H als auch S auf der Geraden MO, und es gilt $MH : OH = MS : SO = 1 : 2$ (unter Verwendung gerichteter Strecken), woraus die Behauptung folgt. Außerdem ergibt sich aus diesen Betrachtungen, dass der Umkreisradius von ABC der doppelte Umkreisradius von DEF sein muss.

Der Punkt S liegt im Inneren des Dreiecks ABC, und daher innerhalb des Umkreises, während H außerhalb des Umkreises liegt, da ABC stumpfwinklig ist. Daher schneidet der Kreis mit dem Durchmesser HS den Umkreis von ABC in zwei Punkten.

Sei X einer dieser Schnittpunkte. Wir zeigen nun, dass $MX : OX = 1 : 2$ gilt, woraus folgt, dass X auch auf dem Feuerbachkreis liegen muss. Sei N der Mittelpunkt von HS, sodass nach Thales die Strecken HN, XN und SN gleich lang sind. Außerdem gilt $HN : NM : MS : SO = 2 : 1 : 1 : 2$. Es folgt $MN : XN = XN : ON$. Daher sind die Dreiecke XNM und ONX ähnlich, und ihre Seitenlängen stehen im Verhältnis $1 : 2 = MN : XN$. Also gilt $MX : OX = 1 : 2$ wie behauptet.

(Josef Greilhuber) □

Lösung 3. Es seien O der Umkreismittelpunkt von ABC und N der Umkreismittelpunkt von DEF, also der Mittelpunkt des Neunpunktekreises von ABC. Bekanntlich liegen O, S, N und H in dieser

Reihenfolge auf der Eulerschen Geraden des Dreiecks ABC mit bekannten Teilverhältnissen.
Wir nehmen o. B. d. A. an, O sei der Ursprung des Koordinatensystems. Dann gelten

$$O = 0, \qquad S = \frac{A+B+C}{3}, \qquad N = \frac{A+B+C}{2}, \qquad H = A+B+C.$$

Es sei R der Umkreisradius von ABC. Die Gleichungen der Umkreise von ABC und DEF lauten dann

$$|X|^2 = R^2 \qquad \text{bzw.} \qquad |X-N|^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Zwei Kreise schneiden einander genau dann, wenn sich aus dem Zentralabstand und den beiden Radien ein Dreieck bilden lässt. Das bedeutet in unserem Fall

$$R - \frac{R}{2} < |O-N| < R + \frac{R}{2}.$$

Wir verwenden im Folgenden die üblichen Bezeichnungen a, b, c für die Seiten und α, β, γ für die Winkel von ABC und berechnen

$$|O-N|^2 = \frac{1}{4}|A+B+C|^2 = \frac{3|A|^2+3|B|^2+3|C|^2-|A-B|^2-|A-C|^2-|C-B|^2}{4} = \frac{9R^2-a^2-b^2-c^2}{4},$$

woraus $|O-N| < \frac{3}{2}R$ folgt. Da andererseits in jedem Dreieck gilt

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= (\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta)\cos\gamma = -\cos^2\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \\ &= -1+\sin^2\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = -1+\left(\frac{c}{2R}\right)^2+\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = -1+\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2},\end{aligned}$$

erhalten wir aus der Beziehung $|O-N|^2 = \frac{R^2}{4} - 2R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, dass im stumpfwinkligen Dreieck $|O-N| > \frac{R}{2}$ gilt. Wir nehmen an, dass ein Punkt X auf beiden Kreisen liegt und zeigen, dass dann $XH \perp XS$, womit X auch auf dem Thaleskreis über HS liegt. Es gilt aber

$$\langle X-H, X-S\rangle = \left\langle X-2N, X-\frac{2N}{3}\right\rangle = |X|^2-\frac{8}{3}\langle N,X\rangle+\frac{4}{3}|N|^2 = \frac{4}{3}|X-N|^2-\frac{1}{3}|X|^2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{R^2}{4}-\frac{R^2}{3} = 0.$$

(Gerhard Kirchner) □

Aufgabe 5. *Sei n eine positive ganze Zahl und seien z_1, z_2, …, z_n positive ganze Zahlen, sodass für $j = 1, 2, \ldots, n$ die Ungleichungen*

$$z_j \le j$$

gelten und $z_1 + \ldots + z_n$ gerade ist.

Man beweise, dass sich unter den Werten

$$z_1 \pm z_2 \pm \ldots \pm z_n$$

die Zahl 0 befindet, wobei unabhängig voneinander für jede Operation + oder − gewählt werden kann.
(Walther Janous)

Lösung 1. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion.

- $n = 1$. Es gilt $z_1 = 1$, sodass die Summe nicht gerade ist. Es gibt also für $n = 1$ keine Möglichkeit, die Bedingungen der Angabe zu erfüllen. Somit ist auch nichts zu beweisen.
- $n = 2$. Dann führen $z_1 \le 1$, $z_2 \le 2$ und die Bedingung, dass $z_1 + z_2$ gerade ist, auf $z_1 = z_2 = 1$ samt $z_1 - z_2 = 0$.

- $n = 3$. Hier ergeben $z_1 \leq 1$, $z_2 \leq 2$, $z_3 \leq 3$ und die Bedingung, dass $z_1 + z_2 + z_3$ gerade ist, die drei Möglichkeiten $(1, 1, 2)$ und $(1, 2, 1)$ bzw. $(1, 2, 3)$ mit $1+1-2 = 0$, $1-2+1 = 0$ und $1+2-3 = 0$.

- Die Aussage möge bis n gelten und wir führen nun den Schluss von n auf $n+1$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

  (a) $z_{n+1} = z_n$: In diesem Fall ist $z_1 + \ldots + z_{n-1}$ gerade. Deshalb ist 0 in der Form $z_1 \pm \ldots \pm z_{n-1}$ und damit auch als $z_1 \pm \ldots \pm z_{n-1} + z_n - z_{n+1}$ darstellbar.

  (b) $z_{n+1} \neq z_n$: Mit $z_1 + \ldots + z_{n-1} + z_n + z_{n+1}$ ist auch $z_1 + \ldots + z_{n-1} + |z_{n+1} - z_n|$ gerade. Außerdem ist $1 \leq |z_{n+1} - z_n| \leq |(n+1) - 1| = n$ und wir können die Induktionsvorausetzung für die n Zahlen $z_1, \ldots, z_{n-1}, |z_{n+1} - z_n|$ anwenden. Folglich lässt sich 0 als $z_1 \pm \ldots \pm z_{n-1} \pm |z_{n+1} - z_n|$ darstellen. Wegen $|z_{n+1} - z_n| = \pm(z_{n+1} - z_m)$ erhalten wir schließlich eine Darstellung von 0 der Form $z_1 \pm \ldots \pm z_{n-1} \pm z_n \pm z_{n+1}$, womit der Induktionsschritt abgeschlossen ist.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Es reicht zu zeigen, dass sich unter den Werten

$$\pm z_1 \pm z_2 \pm \ldots \pm z_n$$

die Zahl 0 befindet.

Wir wollen dazu alle Werte bestimmen, die von diesem Ausdruck angenommen werden, und lassen dabei die Bedingung, dass die Summe gerade ist, vorläufig weg.

Sei also $s_n = z_1 + \ldots + z_n$ sowie $z_j \leq j$ für alle j. Wir behaupten, dass

$$\pm z_1 \pm z_2 \pm \ldots \pm z_n$$

genau die Werte

$$-s_n, -s_n + 2, -s_n + 4, \ldots, s_n - 4, s_n - 2, s_n$$

annimmt,

Wir zeigen das mit Induktion.

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ muss $z_1 = 1$ sein. Offensichtlich ist $s_1 = 1$ und wir können die Werte $-1, 1$ erhalten.

- Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für ein bestimmtes n.

- Induktionsbehauptung: Die Behauptung gilt auch für $n + 1$.

- Induktionsbeweis: Da alle z_i positiv sind, ist $s_{n+1} = z_1 + z_2 + \ldots + z_{n+1}$ natürlich der maximale Wert, den man erhalten kann. Laut Induktionsvoraussetzung können wir mit

  $$z_{n+1} \pm z_1 \pm z_2 \ldots \pm z_n$$

  die Werte

  $$z_{n+1} + s_n, z_{n+1} + s_n - 2, \ldots, z_{n+1} - s_n$$

  erreichen.

  Da $z_i \geq 1$ gilt aber $s_n \geq n$ und somit $z_{n+1} - s_n \leq n+1-n = 1$. Somit erreicht man je nach Parität auf jeden Fall 1 oder 0. Durch Umkehren aller Vorzeichen erhält man auch die entsprechenden negativen Zahlen, womit die Induktionsbehauptung bewiesen ist.

Daraus folgt nun für gerades s_n, dass 0 in der Liste enthalten ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 6. *Man bestimme für jede Primzahl p die Anzahl der Restklassen modulo p, die sich als a^2+b^2 modulo p darstellen lassen, wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind.*

(Daniel Holmes)

Antwort. Alle p Restklassen.

Lösung 1. Wir wollen zeigen, dass sich jede Restklasse k mod p in der Form a^2+b^2 mit $a, b \in \mathbb{Z}$ darstellen lässt. Da der Fall $p = 2$ klar ist, sei p ungerade.
Es sei Q die Menge der quadratischen Reste mod p (einschließlich 0), bekanntlich enthält sie genau $\frac{p+1}{2}$ Elemente. Ebenso enthält die Menge $k - Q = \{k - q; q \in Q\}$ genau $\frac{p+1}{2}$ Elemente. Wenn die beiden Mengen disjunkt wären, so enthielten sie zusammen $p + 1$ verschiedene Restklassen mod p, ein Widerspruch. Also muss es eine Restklasse geben, die in beiden Mengen liegt. Diese hat also die beiden Darstellungen a^2 und $k - b^2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt

$$a^2 \equiv k - b^2 \pmod p \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 + b^2 \equiv k \pmod p.$$

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 2. Mit $a^2 + 0^2$ erhält man zunächst alle quadratischen Reste.

Da nicht alle Restklassen quadratische Reste sind, gibt es einen quadratischen Rest a^2, auf den ein quadratischer Nichtrest folgt, sodass $n = a^2 + 1$ kein quadratischer Rest ist und damit natürlich auch $n \not\equiv 0 \pmod p$.

Da aber bekanntlich das Produkt zweier quadratischer Nichtreste ein quadratischer Rest ist, folgt für jeden quadratischen Nichtrest m, dass $mn = c^2$ für ein passendes c ist. Somit gilt

$$m = nmn/n^2 = (a^2 + 1)c^2/n^2 \equiv (acn^{-1})^2 + (cn^{-1})^2 \pmod p$$

und somit sind auch alle quadratischen Nichtreste als Summe zweier Quadrate darstellbar.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2a. Wie in Lösung 1 zeigen wir, dass alle quadratischen Reste sowie ein Nichtrest n als Summe zweier Quadrate modulo p darstellbar sind. Es gilt also $n = a^2 + b^2$.

Wir wissen, dass ein Nichtrest multipliziert mit einem quadratischen Rest ungleich 0 wieder einen Nichtrest ergibt. Wir betrachten nun alle Restklassen der Form nk^2 mit $k \not\equiv 0 \bmod p$. Diese sind Nichtreste und verschieden, wenn k^2 verschieden ist, da aus $nk_1^2 \equiv nk_2^2 \bmod p$ folgt, dass $n(k_1^2 - k_2^2) \equiv 0 \bmod p$ ist, was nicht möglich ist.

Somit erhalten wir $(p - 1)/2$ verschiedene Nichtreste, die als Summe zweier Quadrate modulo p darstellbar sind. Das sind aber dann schon alle, wie gewünscht.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 3. Wir beweisen im Folgenden, dass sich jede Restklasse modulo p als Summe zweier Quadrate schreiben lässt.

Für $p = 2$ ist das klar: $0 \equiv 0^2 + 0^2$ und $1 \equiv 1^2 + 0^2$.

Sei von nun an p eine ungerade Primzahl und sei

$$Q_p := \big\{n \in \{1, 2, \dots, p - 1\} : \exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ sodass } n \equiv a^2 + b^2 \bmod p\big\} \subset \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Im Folgenden sind alle Rechenausdrücke modulo p zu verstehen, sodass das Ergebnis einer ganzzahligen Rechnung stets in $\{0, 1, \dots, p - 1\}$ liegt.

Lemma. Wenn $m, n \in Q_p$ dann ist auch mn (modulo p) in Q_p.

Beweis. Sei $m \equiv a^2 + b^2$ und $n \equiv c^2 + d^2 \bmod p$. Man prüft leicht nach, dass dann

$$mn \equiv (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \bmod p.$$

(Darauf kommt man bekannterweise, indem man $a^2 + b^2 = |a + ib|^2$ schreibt und verwendet, dass die Norm von komplexen Zahlen multiplikativ ist.)

Da p ausserdem eine Primzahl ist und $p \nmid m, n$, gilt $p \nmid mn$ und daher $mn \pmod p \in Q_p$. ∎

Lemma. Für jedes $m \in Q_p$ gibt es ein $n \in Q_p$, sodass $mn \equiv 1 \bmod p$.

Beweis. Sei $m \equiv a^2 + b^2 \bmod p$. Da $p \nmid m$, hat $a^2 + b^2$ ein multiplikatives Inverses mod p, sagen wir c. Man prüft leicht nach, dass

$$n := (ca)^2 + (cb)^2$$

funktioniert, denn $p \nmid c$, weshalb $p \nmid n$, und weiters gilt

$$mn \equiv (a^2 + b^2)\left((ca)^2 + (cb)^2\right) \equiv (c(a^2 + b^2))^2 \equiv 1 \bmod p.$$

∎

Lemma. Die Zahl $p - 1$ ist durch $|Q_p|$ teilbar.

Beweis. Wir können die Menge $M := \{1, 2, \dots, p - 1\}$ folgendermassen in Äquivalenzklassen einteilen. Dabei nutzen wir, dass M abgeschlossen unter Multiplikation modulo p ist und jedes Element von M ein multiplikatives Inverses in M hat (da p eine Primzahl ist).

Wir nennen nun $a, b \in M$ *äquivalent*, wenn $ab^{-1} \in Q_p$. Eigenschaften:

- a und b sind genau dann äquivalent, wenn b und a äquivalent sind, denn $ab^{-1} \in Q_p$ gilt dann und nur dann, wenn $ba^{-1} \in Q_p$ (Lemma 2).
- Wenn a und b äquivalent sind, und b und c äquivalent sind, so sind auch a und c äquivalent. Denn $ab^{-1}, bc^{-1} \in Q_p$ impliziert nach Lemma 1, dass $ab^{-1}bc^{-1} = ac^{-1} \in Q_p$.
- Jedes a ist zu sich selbst äquivalent, denn $aa^{-1} = 1 \in Q_p$, da $1 = 1^2 + 0^2$.

Seien nun $K_1, \dots, K_l$ die Äquivalenzklassen, sodass M die disjunkte Vereinigung von $K_1, \dots, K_l$ ist, jedes K_i nicht leer ist, und zwei Elemente von M genau dann äquivalent sind, wenn sie im gleichen K_i sind. Dann gilt

$$p - 1 = |M| = |K_1| + \dots + |K_l|.$$

Es reicht also zu zeigen, dass $|K_i|$ für jedes $1 \leq i \leq l$ durch $|Q_p|$ teilbar ist.

Das folgt aber daraus, dass die Elemente von K_i genau

$$K_i = \{aq_1, aq_2, \dots, aq_{|Q_p|}\} \text{ modulo } p$$

sind, wobei a ein beliebiges Element aus K_i ist und $q_1, q_2, \dots, q_{|Q_p|}$ die Elemente von Q_p sind. Die obigen Elemene sind alle verschieden modulo p (da p prim ist). Man prüft leicht aus der Definition von *äquivalent* und den obigen Eigenschaften nach, dass jedes K_i diese Form hat. Daher gilt $|K_i| = |Q_p|$, und insbesondere ist jedes $|K_i|$ durch $|Q_p|$ teilbar, wie gewünscht. ∎

Letzter Teil der Lösung. Laut Lemma 3 ist $p-1$ durch $|Q_p|$ teilbar. Andererseits gibt es bekanntlich $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste (ungleich 0) mod p, womit bereits soviele Restklassen von der Form $a^2 + 0^2$ sind (mit $p \nmid a$). Daher gilt

$$|Q_p| \in \left\{\frac{p-1}{2}, p - 1\right\}.$$

Da nicht alle Restklassen modulo p quadratische Reste sind (und 1 immer ein quadratischer Rest ist), gibt es ein $a \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$ sodass $a^2 + 1$ nicht 0 mod p ist und kein quadratischer Rest ist. Dann ist $a^2 + 1^2 \in Q_p$ neu, woraus $|Q_p| > \frac{p-1}{2}$ folgt. Daher gilt $|Q_p| = p - 1$.

Daraus folgt, dass jede Restklasse modulo p von der Form $a^2 + b^2$ ist. (Insbesondere ist $0 = 0^2 + 0^2$.) ∎

Anmerkung Mit dem gleichen Argument kann man zeigen, dass jede Restklasse modulo p die Form $a^2 + \gamma b^2$ hat, wobei $\gamma \geq 1$ eine beliebige zuvor fixierte ganze Zahl ist, die nicht durch p teilbar ist.

(Daniel Holmes) $\square$