

## 55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

29. Mai 2024

---

1. Man bestimme die kleinste Konstante  $C$ , sodass für alle reellen Zahlen  $X$  und  $Y$  die Ungleichung

$$(X + Y)^2(X^2 + Y^2 + C) + (1 - XY)^2 \geq 0$$

erfüllt ist.

Für welche Werte von  $X$  und  $Y$  wird mit dieser kleinsten Konstanten  $C$  in der Ungleichung Gleichheit angenommen?

*(Walther Janous)*

2. Sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck mit  $AB > AC$ . Die Punkte  $D$ ,  $E$  und  $F$  seien die Höhenfußpunkte auf  $BC$ ,  $AC$  bzw.  $AB$ . Der Schnittpunkt der Geraden  $EF$  und  $BC$  sei  $S$ . Man beweise, dass die Umkreise  $k_1$  und  $k_2$  der Dreiecke  $AEF$  und  $DES$  einander in  $E$  berühren.

*(Karl Czakler)*

3. Am Anfang stehen die Zahlen  $1, 2, \dots, 2024$  an einer Tafel. Trixi und Nana spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd am Zug sind. Trixi beginnt.

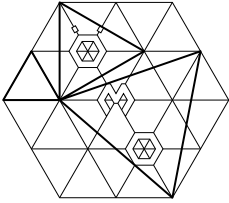
Wer am Zug ist, wählt zwei Zahlen  $a$  und  $b$  aus, löscht beide, und schreibt deren (möglicherweise negative) Differenz  $a - b$  an die Tafel. Dies wird so lange wiederholt, bis nach 2023 Schritten nur noch eine einzige Zahl an der Tafel steht. Trixi gewinnt, wenn diese Zahl durch 3 teilbar ist, andernfalls gewinnt Nana.

Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

*(Birgit Vera Schmidt)*

Arbeitszeit:  $4\frac{1}{2}$  Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.



## 55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

30. Mai 2024

---

4. Sei  $ABC$  ein stumpfwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt  $H$  und Schwerpunkt  $S$ . Die Mittelpunkte der Seiten  $BC$ ,  $AC$  und  $AB$  seien mit  $D$ ,  $E$  bzw.  $F$  bezeichnet. Man zeige, dass der Umkreis von  $ABC$ , der Umkreis von  $DEF$  und der Kreis mit Durchmesser  $HS$  durch zwei gemeinsame Punkte gehen.

(Josef Greilhuber)

5. Sei  $n$  eine positive ganze Zahl und seien  $z_1, z_2, \dots, z_n$  positive ganze Zahlen, sodass für  $j = 1, 2, \dots, n$  die Ungleichungen

$$z_j \leq j$$

gelten und  $z_1 + \dots + z_n$  gerade ist.

Man beweise, dass sich unter den Werten

$$z_1 \pm z_2 \pm \dots \pm z_n$$

die Zahl 0 befindet, wobei unabhängig voneinander für jede Operation  $+$  oder  $-$  gewählt werden kann.

(Walther Janous)

6. Man bestimme für jede Primzahl  $p$  die Anzahl der Restklassen modulo  $p$ , die sich als  $a^2 + b^2$  modulo  $p$  darstellen lassen, wobei  $a$  und  $b$  beliebige ganze Zahlen sind.

(Daniel Holmes)

Arbeitszeit:  $4\frac{1}{2}$  Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

Lösungen: <http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2024>

