IMO 2023 Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1: Man bestimme alle zusammengesetzten ganzen Zahlen $n > 1$ mit der folgenden Eigenschaft: Sind $d_1, d_2, \ldots, d_k$ mit $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ alle positiven Teiler von n, dann ist d_i ein Teiler von $d_{i+1} + d_{i+2}$ für alle $1 \leq i \leq k-2$.

Lösung: Genau die Primpotenzen $n = p^r$ mit $r \geq 2$ haben diese Eigenschaft.

Es ist zuerst klar, dass diese Zahlen die Bedingung erfüllen, denn für $n = p^r$ mit $r \geq 2$ gilt $d_i = p^{i-1}$, $d_{i+1} = p^i$ und $d_{i+2} = p^{i+1}$, und wegen

$$d_{i+1} + d_{i+2} = p^i + p^{i+1} = p^i \cdot (p+1)$$

gilt auch

$$d_i = p^{i-1} \mid p^i \cdot (1+p) = d_{i+1} + d_{i+2}.$$

Nun bleibt zu zeigen, dass es keine weiteren Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt. Wir nehmen an, es gäbe eine Zahl n mit dieser Eigenschaft, die zwei verschiedene Primteiler p und q besitzt. Wir nehmen oBdA an, es gelte $p < q$, und es seien dies die zwei kleinsten Primteiler von n. Dann gibt es einen Index j, sodass

$$d_1 = 1, d_2 = p, \ldots, d_j = p^{j-1}, d_{j+1} = q, \ldots,$$

und es folgt daraus auch

$$d_{k-j-1} = \frac{n}{q}, d_{k-j} = \frac{n}{p^j}, d_{k-j+1} = \frac{n}{p^{j-1}}, \ldots, d_{k-1} = \frac{n}{p}, d_k = n.$$

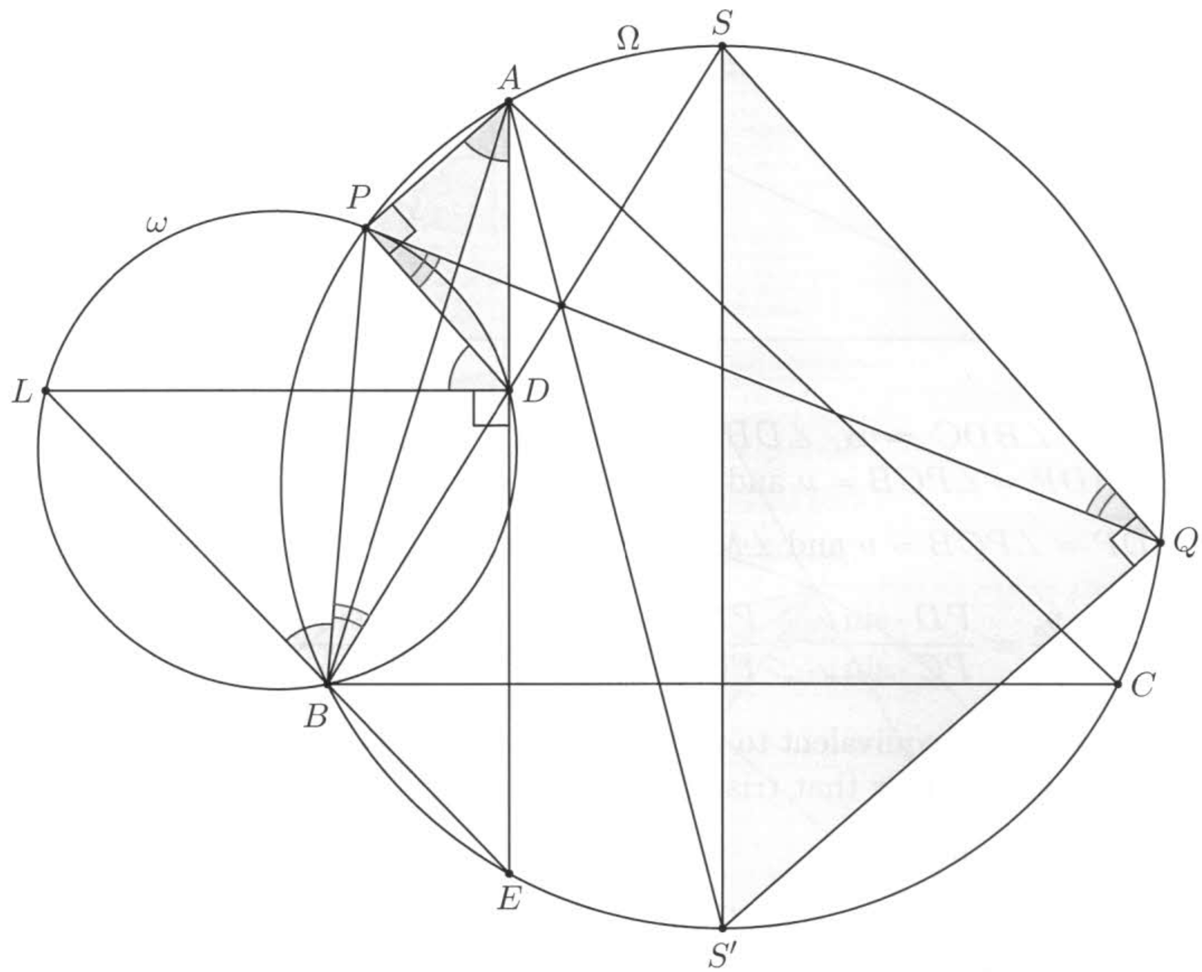
Nun gilt aber $d_{k-j-1} \mid d_{k-j} + d_{k-j+1}$, oder

$$\frac{n}{q} \mid \frac{n}{p^j} + \frac{n}{p^{j-1}} = \frac{n}{p^j} \cdot (p+1).$$

Daraus folgt aber $p^j \mid q(p+1)$, was nicht möglich ist, da p und q verschiedene Primzahlen sind und auch sicher p nicht $p+1$ teilt. Wir erhalten also einen Widerspruch, und es muss somit $n = p^r$ gelten. $\square$

Aufgabe 2: Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$ und sei Ω der Umkreis von ABC. Ferner sei S der Mittelpunkt des Bogens CB von Ω, der A enthält. Die Senkrechte von A auf BC schneide BS in D und Ω nochmals in $E \neq A$. Die Parallele zu BC durch D schneide die Gerade BE in L. Der Umkreis des Dreiecks BDL sei mit ω bezeichnet. Der zweite Schnittpunkt von ω mit Ω sei $P \neq B$.
Man beweise, dass die Tangente an ω in P die Gerade BS auf der inneren Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ schneidet.

Lösung: Wir definieren zuerst den Punkt S' als den Punkt, der S diametral auf Ω gegenüberliegt, also den Mittelpunkt des Bogens BS, der A nicht enthält. Dies ist also der Südpol von ABC relativ zu A, und AS' ist somit die Winkelsymmetrale von $\angle BAC$. Ferner definieren wir den Punkt Q als den Schnittpunkt der Tangente von ω in P mit Ω. Es gilt offensichtlich $\angle SQS' = 90°$. Wir werden nun zeigen, dass die Dreiecke APD und $S'QS$ ähnlich sind mit paarweise parallelen Seiten, womit sie sogar zentrisch ähnlich sind. (Da sie umgekehrt orientiert sind, können sie nicht durch Schiebung ineinander übergehen.



Zuerst zeigen wir, dass $AP \perp DP$ gilt. Dies folgt aus den Sehnenvierecken $APBE$ und $DPLB$, denn wir haben

$$\angle PAD = \angle PAE = 180^\circ - \angle EBP = \angle PBL = \angle PDL = 90^\circ - \angle ADP.$$

Im Dreieck APD ist der Winkel in P somit gleich 90°.

Nun gilt $AD \| SS'$, da beide Geraden normal zu BC stehen. Da PQ die Tangente von ω in P ist, gilt

$$\angle DPQ = \angle DBP = \angle SBP = \angle SQP,$$

und somit $PD \| QS$. Da $PA \perp PD$ und $QS \perp QS'$, gilt auch $PA\ QS'$, und die Deiecke APD und $S'QS$ sind somit ähnlich. Da sie somit zentrisch ähnlich sind, haben die Geraden AS', PQ und DS einen gemeinsamen Punkt, womit der Schnittpunkt von PQ und BS wie behauptet auf der Winkelsymmetrale AS' von $\angle BAC$ liegt. $\square$

Aufgabe 3: Man bestimme für jede ganze Zahl $k \geqslant 2$ alle unendlichen Folgen positiver ganzer Zahlen $a_1, a_2, \ldots$, für die ein Polynom P der Gestalt $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ mit nichtnegativen ganzzahligen $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ existiert, sodass

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ gilt.

Lösung: Die Folgen mit dieser Eigenschaft sind genau die arithmetischen Folgen mit positivem Anfangswert a_1 und nicht-negativer Differenz d. Das zugehörige Polynom

$$P(x) = (x + d)(x + 2d) \dots (x + kd)$$

hat dann die geforderte Eigenschaft. Es bleibt nun zu zeigen, dass eine Folge, die die geforderte Bedingung erfüllt jedenfalls eine monoton wachsende arithmetische Folge sein muss.

Da $P(x)$ positive Koeffizienten hat, gilt für positive Zahlen x und y sicher

$$x < y \iff P(x) < P(y).$$

Ist die Folge ab einem bestimmten Index konstant, so gilt $P(x) = x^k$, und die Folge ist somit durchgehend konstant, was unmittelbar aus einer umgekehrten Induktion folgt.

Wir nehmen also im Folgenden an, dass die Folge der a_n nicht ab irgendeinem Index konstant wird. Wir wollen zuerst zeigen, dass die Folge in diesem Fall monoton wachsend sein muss, also, dass $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$ gilt. Zu diesem Zweck setzen wir die beiden Folgenglieder in der gegebenen Beziehung ein und erhalten

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k} \quad \text{und} \quad P(a_{n+1}) = a_{n+2}a_{n+3} \dots a_{n+k+1}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
a_n < a_{n+1} &\iff P(a_n) < P(a_{n+1}) \iff a_{n+1} < a_{n+k+1} &\quad (1)\\
a_n > a_{n+1} &\iff P(a_n) > P(a_{n+1}) \iff a_{n+1} > a_{n+k+1} &\quad (2)\\
a_n = a_{n+1} &\iff P(a_n) = P(a_{n+1}) \iff a_{n+1} = a_{n+k+1} &\quad (3)
\end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, es sei die Folge nicht durchgehend monoton wachsend. In diesem Fall gibt es einen Index $n(0) \geq 2$, sodass $a_{n(0)-1} > a_{n(0)}$. In diesem Fall können wir aber eine monoton fallende Teilfolge der a_n finden. Diese kann induktiv konstruiert werden. Wählen wir einen Index $n(i)$, können wir als Index $n(i + 1)$ den nächstfolgenden Index wählen, für den $a_{n(i)} > a_{n(i+1)}$ gilt. Dieser existiert aufgrund der Beziehung (2) auf jeden Fall mit $n(i)+1 \leq n(i+1) \leq n(i)+k$ wegen $a_{n(i)} > a_{n(i)+k}$, und es gilt

$$a_{n(i)-1} > a_{n(i)} \quad \text{und} \quad a_{n(i)} > a_{n(i+1)}.$$

Es muss nun noch gezeigt werden, dass auch $a_{n(i+1)-1} > a_{n(i+i)}$ gilt. Dies ist sicher der Fall, wenn $n(i+1) = n(i)+1$ gilt, aufgrund der Konstruktion. Gilt $n(i+1) \geq n(i)+2$, so folgt $a_{n(i+1)-1} \geq a_{n(i)}$ aus der Minimaleigenschaft von $n(i + 1)$, und somit gilt in diesem Fall $a_{n(i+1)-1} \geq a_{n(i)} > a_{n(i+1)}$.

Wir hätten also in diesem Fall eine monoton fallende Folge positiver Zahlen, was offensichtlich einen Widerspruch ergibt. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass die Folge sogar streng monoton steigen ist. Nehmen wir an, es gelte $a_n = a_{n+1}$ für einen Index n. Dann gilt aber auch nach (3) sicher $a_{n+1} = a_{n+k+1}$, und aufgrund der Monotonie folgt dann $a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{n+k+1}$. Wiederholung dieses Arguments für $a_{n+k} = a_{n+k+1}$, sehen wir, dass die Folge ab einem bestimmten Index konstant ist, was im Widerspruch zur Annahme steht. Es folgt also $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$.

Im nächsten Schritt wollen wir zeigen, dass die Folge der a_n arithmetisch ist. Zu diesem Zweck schreiben wir

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+k} = (a_n + (a_{n+1} - a_n))(a_n + (a_{n+2} - a_n)) \dots (a_n + (a_{n+k} - a_n)).$$

Wir zeigen nun, dass für ausreichend große n, die Summe

$$(a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_n) + \ldots + (a_{n+k} - a_n)$$

gleich dem Koeffizienten b von x^{k-1} in P ist. Diese zeigen wir mit Hilfe der folgenden Behauptung.

Behauptung: Es existiert eine Schranke A mit folgenden Eigenschaften:

1) Ist $(c_1, \ldots, c_k)$ ein k-tupel positiver ganzer Zahlen mit $c_1 + \ldots + c_k > b$, so gilt für jedes $x \geq A$ sicher $P(x) < (x + c_1)(x + c_2) \ldots (x + c_k)$.

2) Ist $(c_1, \ldots, c_k)$ ein k-tupel positiver ganzer Zahlen mit $c_1 + \ldots + c_k < b$, so gilt für jedes $x \geq A$ sicher $P(x) > (x + c_1)(x + c_2) \ldots (x + c_k)$.

Beweis der Behauptung: Es genügt, diese beiden Behauptungen getrennt zu beweisen, da wir dann das Maximum der beiden Schranken als gemeinsame Schranke verwenden können. Wir betrachten zuerst Teil 1). Für jedes $(c_1, \ldots, c_k)$ gibt es eine solche Schranke A, da das Polynom

$$P(x) - (x + c_1)(x + c_2) \ldots (x + c_k) = (b - (c_1 + \ldots c_k))x^{k-1} + \ldots$$

einen negativen Leitkoeffizienten hat, und somit für ausreichend große Werte von x negative Werte annimmt.

Nun wählen wir A als gemeinsame Schranke für alle k-tupel $c = (c_1, \ldots, c_k)$ mit $c_1 + \ldots c_k = b + 1$ (von denen es nur endlich viele gibt). Dann gibt es für jedes k-tupel $c' = (c'_1 + \ldots + c'_k) > b$ ein k-tupel c mit $c_1 + \ldots + c_k = b + 1$ und $c'_i \geq c_i$, und die Gültigkeit der Ungleichung für c' folgt aus deren Gültigkeit für c.

Teil 2) kann nun auf analoge Weise nachgewiesen werden, was den Beweis der Behauptung abschließt.

Wählen wir nun den Wert von A aus dieser Behauptung und N so, dass $n \geq N \Rightarrow a_n \geq A$ gilt. Dann folgt für jedes $n \geq N$

$$(a_{n+1} - a_n) + \ldots + (a_{n+k} - a_n) = b.$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von der analogen Gleichung für $n + 1$, erhalten wir

$$a_{n+k+1} - a_{n+1} = k(a_{n+1} - a_n)$$

für alle $n \geq N$.

Nun sei $d = \min\{a_{n+1} - a_n \mid n \geq N\}$, und sei dieser Wert für einen bestimmten Index n angenommen. Wegen

$$kd = k(a_{n+1} - a_n) = a_{n+k+1} - a_{n+1} = \sum_{i=1}^{k} (a_{n+i+1} - a_{n+i})$$

wobei jeder Summand mindestens den Wert d hat, sehen wir, dass der Wet d auch für die ndizes $n + 1, \ldots n + k$ angenommen wird, und induktiv für alle Indizes $n' \geq n$. Wir sehen, dass die Gleichung $P(x) = (x + d)(x + 2d) \ldots (x + kd)$ für unendlich viele Werte von x (alle $a_{n'}$ mit $n' \geq n$) gilt, und die Polynome sind somit identisch. Durch abschließende Rückwärtsinduktion erhalten wir auch noch $a_{n+1} - a_n = d$ für alle $n \geq 1$, was den Beweis abschließt. $\square$

Aufgabe 4: Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, sodass

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

für alle $n = 1, 2, \ldots, 2023$ ganzzahlig ist. Man beweise, dass $a_{2023} \geqslant 3034$ gilt.

Lösung: Wir stellen zuerst fest, dass die Folge der a_n streng monoton steigend ist, und da alle a_i ganzzahlig sind, gilt $a_{n+1} - a_n \geq 1$. Ferner beobachten wir, dass $a_1 = 1$ gilt, sowie

$$a_2 = \sqrt{(x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)} > 2$$

aufgrund der Cauchy Ungleichung mit $x_1 \neq x_2$. (Hinweis: Wir setzen in der Cauchy Ungleichung die Werte $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\frac{1}{\sqrt{x_1}}$ und $\frac{1}{\sqrt{x_2}}$ ein.) Somit gilt also auch $a_2 \geq 3$.

Nun beobachten wir, dass der gegebene Wert 3034 ungefähr um die Hälfte mehr als 2023 ist. Dies motiviert folgende Annahme.

Behauptung: Gilt $a_{n+1} - a_n = 1$, so folgt $a_{n+2} - a_{n+1} \geq 2$.

Mit anderen Worten, die Folgenglieder vergrößern sich in jedem zweiten Schritt um mindestens 2. Stimmt diese Behauptung, so ist das Ergebnis gesichert, denn in diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} a_{2023} &= (a_{2023} - a_{2022}) + (a_{2022} - a_{2021}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1 \\ &\geq (2+1) \cdot 1011 + 1 \\ &= 3034. \end{aligned}$$

Beweis der Behauptung: Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= (x_1 + \ldots + x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n+1}}\right) \\ &= (x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) + 1 + \frac{1}{x_{n+1}}(x_1 + \ldots + x_n) + x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \\ &\geq a_n^2 + 1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x_{n+1}}(x_1 + \ldots + x_n) \cdot x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)} \\ &= a_n^2 + 1 + 2a_n \\ &= (a_n + 1)^2. \end{aligned}$$

Insbesondere, gilt $a_{n+1} = a_n + 1$, so gilt aufgrund der Verwendung der AM-GM Ungleichung

$$\frac{1}{x_{n+1}}(x_1 + \ldots + x_n) = x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right).$$

Nehmen wir nun an, es gelte sowohl $a_{n+1} = a_n + 1$ als auch $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$, so gilt auch

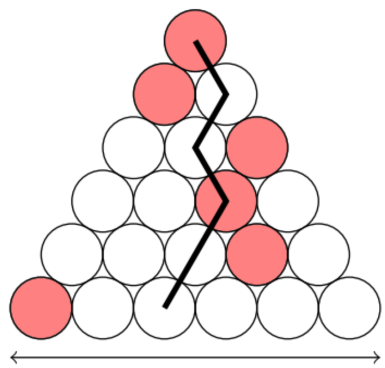
$$\frac{1}{x_{n+2}}(x_1 + \ldots + x_{n+1}) = x_{n+2}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n+1}}\right),$$

was wir auch schreiben können als

$$\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}\left(\frac{1}{x_{n+1}}(x_1+\ldots+x_n)+1\right)=\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\left(x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)+1\right).$$

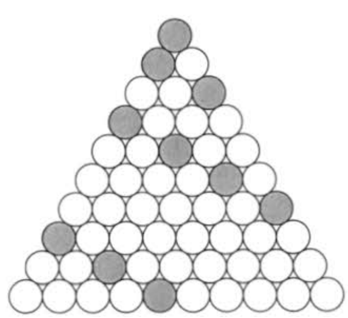
Daraus folgt aber $x_{n+1} = x_{n+2}$, was einen Widerspruch ergibt. Es können also nicht gleichzeitig $a_{n+1} = a_n + 1$ als auch $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ gelten, was den Beweis abschließt. □

Aufgabe 5: Sei n eine positive ganze Zahl. Ein *Japanisches Dreieck* besteht aus $1 + 2 + \cdots + n$ Kreisen, die in Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet sind, sodass für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ die i-te Zeile genau i Kreise enthält, von denen genau einer rot gefärbt ist. Ein *Ninja-Pfad* in einem Japanischen Dreieck ist eine Folge von n Kreisen, bei der man, beginnend in der obersten Reihe, wiederholt von einem Kreis zu einem der beiden unmittelbar darunterliegenden Kreise geht, bis die unterste Reihe erreicht ist. Das Bild zeigt ein Japanisches Dreieck mit $n = 6$ und einen Ninja-Pfad mit zwei roten Kreisen in diesem Dreieck.



Man bestimme, in Abhängigkeit von n, das größte k, sodass es in jedem Japanischen Dreieck einen Ninja-Pfad mit mindestens k roten Kreisen gibt.

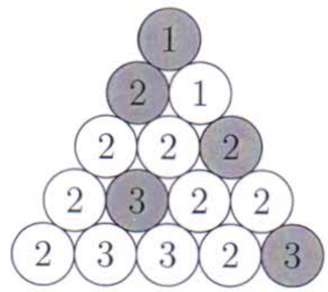
Lösung: Der gesuchte maximale Wert ist $k = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$.
Wir schreiben $N = \lfloor \log_2 n \rfloor$, und es gilt dann $2^N \leq n \leq 2^{N+1} - 1$.
Im Folgenden sehen wir eine Konstruktion für eine Verteilung roter Kreise, in der jeder Ninja-Pfad höchstens $N+1$ rote Kreise enthält. Dabei ist jeweils in der Reihe $i = 2^a + b$ mit $0 \leq a \leq N$ und $0 \leq b < 2^a$ der $(2b + 1)$-te Kreis rot gefärbt.



Hier enthält jeder Ninja-Pfad höchstens einen roten Kreis in den Reihen 2^a, $2^a+1, \dots 2^{a+1}-1$ für jedes $0 \le a \le N$. Es folgt also, dass jeder Ninja-Pfad höchstens $N+1$ rote Kreise enthält.

Nun wollen wir zeigen, dass es in jedem Japanischen Dreieck einen Ninja-Pfad gibt, der mindestens $N+1$ rote Kreise enthält.

Wir schreiben in jeden Kreis C die Maximalzahl von roten Kreisen in einem Ninja-Pfad, der oben beginnt und in diesem Kreis endet. Ein Beispiel sehen wir in folgendem Bild:



Wir stellen nun folgendes fest:

Ist C nicht rot, so ist die Zahl in C gleich dem Maximum der beiden Zahlen in den Kreisen oberhalb von C.

Ist C rot, so ist diese Zahl gleich diesem Maximum plus 1.

Seien nun $v_1, \dots, v_i$ die Zahlen in den Kreise der Reihe i und sei v_m die größte dieser Zahlen. Die Zahlen in der Reihe $i+1$ sind dann mindestens

$$v_1, \dots, v_{m-1}, v_m, v_m, v_{m+1}, \dots, v_i,$$

wobei noch nicht berücksichtigt wurde, dass es in dieser Reihe auch einen roten Kreis gibt. Nehmen wir nun diesen roten Kreis auch in unserer Betrachtung auf, erkennen wir, dass die Summe der Zahlen in der $(i+1)$-ten Zeile mindestens

$$(v_1 + \dots + v_i) + v_m + 1.$$

Nun können wir mit Hilfe dieser Beobachtung folgende Behauptung beweisen.

Behauptung: Es sei σ_k die Summe aller Zahlen in der k-ten Zeile. Dann gilt für $0 \le j \le N$ die Beziehung $\sigma_{2^j} \ge j \cdot 2^j + 1$.

Beweis: Der Beweis gelingt durch Induktion nach j. Für $j=0$ gilt die Behauptung, da die Zahl in der ersten Reihe immer 1 sein muss. Nun nehmen wir an, es gelte $\sigma_{2^j} \ge j \cdot 2^j + 1$. Der Maximalwert in einem Kreis in der 2^j-ten Reihe ist dann mindestens $j+1$. s folgt somit, dass sich in jeder k-ten Reihe mit $k \ge 2^j$ einen Kreis gibt mit einem Zahlenwert von mindestens $j+1$. Wie wir eben beobachtet haben, gilt

$$\sigma_{k+1} \ge \sigma_k + (j+1) + 1 = \sigma_k + (j+2).$$

Somit gilt aber

$$\sigma_{2^{j+1}} \ge \sigma_{2^j} + 2^j(j+2) \ge j \cdot 2^j + 1 + 2^j(j+2) = (j+j+2)2^j + 1 = (j+1)2^{j+1} + 1,$$

womit die Induktion abgeschlossen ist. Für $j=N$ bedeutet dies unmittelbar, dass in einem Kreis der Reihe 2^N mindestens die Zahl $N+1$ vorkommt, und es gibt somit sicher einen Ninja-Pfad mit mindestens $N+1$ roten Kreisen. $\square$

Aufgabe 6: Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Die Punkte A_1, B_1, C_1 liegen im Inneren von ABC, sodass $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ und

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°$$

gilt. Die Geraden BC_1 und CB_1 schneiden sich in A_2, die Geraden CA_1 und AC_1 in B_2, die Geraden AB_1 und BA_1 in C_2. Man beweise: Wenn das Dreieck $A_1B_1C_1$ nicht gleichschenklig ist, dann enthalten die drei Umkreise der Dreiecke AA_1A_2, BB_1B_2 und CC_1C_2 zwei gemeinsame Punkte.

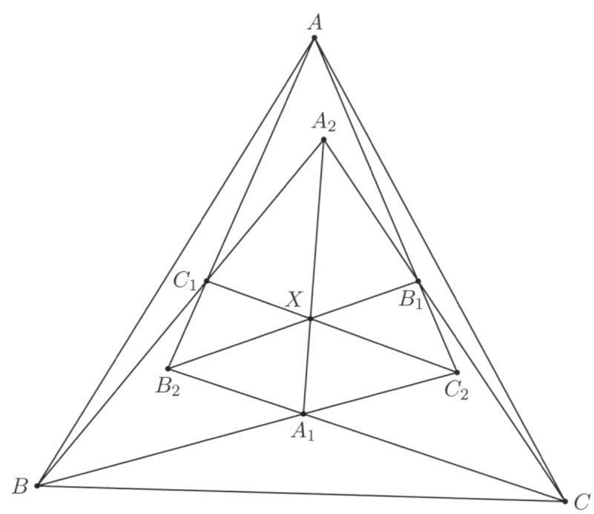
Lösung: Es seien δ_A, δ_B und δ_C die Umkreise der Dreiecke AA_1A_2, BB_1B_2 bzw. CC_1C_2. Wir werden zwei Punkte bestimmen, deren Potenzen bezüglich aller drei Kreise gleich sind, womit dann ihre Verbindungsgerade eine gemeinsame Potenzachse aller drei Kreise sein muss.

Behauptung: Der Punkt A_1 ist der Umkreismittelpunkt von A_2BC (und zyklisch auch B_1 und C_1 von B_2CA bzw. C_2AB).

Beweis der Behauptung: Da sich A_1 auf der Streckensymmetrale von BC und im Inneren von BA_2C befindet, genügt es nachzuweisen, dass $\angle BA_1C = 2\angle BA_2C$ gilt. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}\angle BA_2C &= \angle A_2BA + \angle BAC + \angle ACA_2 \\ &= \frac{1}{2}((180° - \angle AC_1B) + (180° - \angle CB_1A)) + 60° \\ &= 240° - \frac{1}{2}(480° - \angle BA_1C) \\ &= \frac{1}{2}\angle BA_1C\end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Behauptung ist also gezeigt.



Aufgrund dieser Umkreismittelpunkte erhalten wir

$$\angle B_1B_2C_1 = \angle B_1B_2A = \angle B_2AB_1 = \angle C_1AC_2 = \angle AC_2C_1 = \angle B_1C_2C_1,$$

und $B_1C_1B_2C_2$ ist somit ein Sehnenviereck. Analog sind auch $C_1A_1C_2A_2$ und $A_1B_1A_2B_2$ Sehnenvierecke. Wir bemerken allerdings, dass $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ keinen Umkreis besitzt, da

$$\angle C_2A_1B_2 + \angle B_2C_1A_2 + \angle A_2B_1C_2 = 480° \neq 360°$$

gilt. Die Umkreise sind also verschieden, und ihre paarweisen Potenzgeraden schneiden sich im Potenzzentrum X der drei Kreise. Dieser Punkt X hat dann gleiche Potenz bezüglich aller drei Kreise δ_A, δ_B und δ_C.

Nun nehmen wir an, der Umkreis von A_2BC schneide δ_A in $A_3 \neq A_2$. Punkte B_3 und C_3 seien auch analog definiert. Es ergibt sich dann das nächste hilfreiche Zwischenergebnis.

Behauptung: Das Viereck BCB_3C_3 ist ein Sehnenviereck.

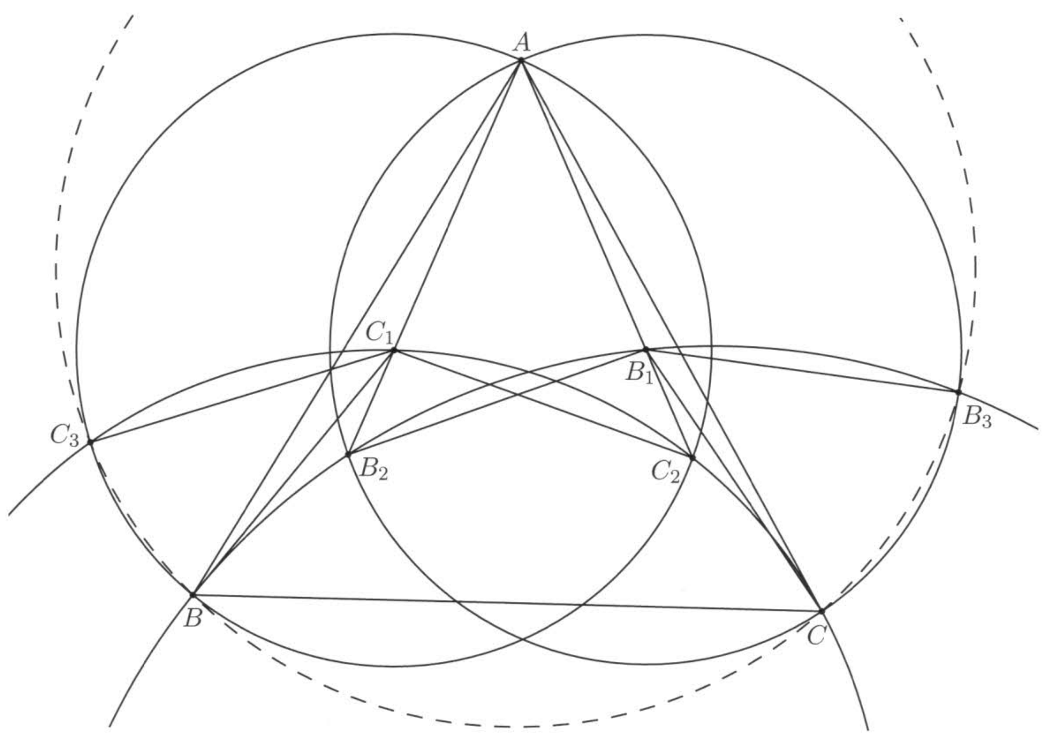
Beweis der Behauptung: Unter Verwendung gerichteter Winkel gilt

$$\begin{aligned}\angle BC_3C &= \angle BC_3C_2 + \angle C_2C_3C\\ &= \angle BAC_2 + \angle C_2C_1C\\ &= 90^\circ + \angle(C_1C, AC_2) + \angle C_2C_1C\\ &= 90^\circ + \angle C_1C_2B_1\end{aligned}$$

(wegen $CC_1 \perp AB$), und analog erhalten wir auch $\angle CB_3B = 90^\circ + \angle B_1B_2C_1$. Da $B_1C_1B_2C_2$ ein Sehnenviereck ist, folgt somit

$$\angle BB_3C = 90^\circ + \angle C_1B_2B_1 = 90^\circ + \angle C_1C_2B_1 = \angle BC_3C,$$

womit BCB_3C_3 ein Sehnenviereck ist.



Analog sind auch $CAC_3A_§$ und ABA_3B_3 Sehnenvierecke. Das Sechseck $AC_3BA_3CB_3$ besitzt sicher keinen Umkreis, da aufgrund der Tatsache, dass AB_2CB_3 in diesem Fall B_2 auf dem Umkreis von ABC liegen würde, was sicher nicht möglich ist, da B_2 im Inneren von ABC liegt. Da sich die Potenzgeraden AA_3, BB_3 und CC_3 der drei Umkreise im Potenzzentrum Y treffen, hat auch dieser Punkt Y dieselbe Potenz bezüglich der drei Kreise δ_A, δ_B und δ_C.

Nun haben wir zwei Punkte X und Y bestimmt, deren Potenz bezüglich aller drei Kreise jeweils gleich ist. Es bleibt also nur noch zu überlegen, ob ihre Verbindungsgerade nicht außerhalb aller Kreise liegt und ob diese Punkte zusammenfallen können.

Um den ersten Punkt zu klären, bezeichnen wir den Umkreismittelpunkt von ABC als O. Es gilt

$$\angle BA_1C = 480° - \angle CB_1A - \angle AC_1B > 480° - 180° - 180° = 120°,$$

und A_1 liegt somit im inneren des Dreiecks BOC. Analoges gilt für B_1 und C_1, und die Dreiecke BA_1C, CB_1A und AC_1B haben somit paarweise jeweils keine gemeinsamen inneren Punkte. Das Sechseck $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ ist somit konvex, und X liegt daher auf der Strecke A_1A_2, und somit im Inneren von δ_A. Die Verbindungsgerade von X und Y schneidet somit sicher diesen Kreis.

Nun bleibt zu zeigen, dass $X \neq Y$ gilt. Da A_1 der Umkreismittelpunkt von A_2BC ist, gilt $A_1A_2 = A_1A_3$, und im Sehnenviereck $AA_2A_1A_3$ sehen wir, dass die Geraden AA_2 und $AA_3 = AY$ symmetrisch bezüglich AA_1 liegen. Da X auf der Strecke A_1A_2 liegt, kann $X = Y$ nur dann gelten, wenn A_1 und A_2 beide auf der Streckensymmetrale von BC liegen. In diesem Fall liegen aber auch B_1 und C_1 symmetrisch bezüglich dieser Gerade, und wir erhalten $A_1B_1 = A_1C_1$, im Widerspruch zur Annahme, dass das Dreieck $A_1B_1C_1$ nicht gleichschenkelig ist.

Wir sehen also, dass $X \neq Y$ gilt, und dass die Gerade XY die gemeinsame Potenzgerade aller drei Kreise δ_A, δ_B und δ_C ist. Da sie δ_A schneidet, liegen die Schnittpunkte dieser Geraden mit δ_A somit auf allen drei Krisen, wie behauptet. $\square$