54. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb – Lösungen

13. Juni 2023

Aufgabe 1. *Seien x, y, z reelle Zahlen ungleich Null mit*

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Man bestimme alle möglichen Werte von

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

(Walther Janous)

Antwort. Die einzigen möglichen Werte sind 8 und -1.

Lösung 1. Setzen wir $\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = a$, so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem

$$x + y = az$$
$$y + z = ax$$
$$z + x = ay.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$2(x + y + z) = a(x + y + z),$$

was äquivalent ist zu

$$(2 - a)(x + y + z) = 0.$$

Ist ein Produkt Null, so muss einer der beiden Faktoren Null gewesen sein. Wir unterscheiden also zwei Fälle:

- Ist $2 - a = 0$, also $a = 2$, so folgt aus der ersten Gleichung $\frac{x+y}{2} = z$. Setzen wir das in die zweite Gleichung ein und vereinfachen, so erhalten wir $x = y$. Analog folgt $y = z$, also haben wir $x = y = z$. Für das gesuchte Produkt ergibt sich damit

  $$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{2x \cdot 2x \cdot 2x}{x^3} = 8.$$

  Dieser Wert wird u.a. für das Tupel $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ angenommen.

- Ist $x + y + z = 0$, so gilt $x + y = -z$, $y + z = -x$ und $z + x = -y$. Damit ergibt sich für das gesuchte Produkt

  $$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{(-z)(-x)(-y)}{xyz} = -1.$$

  Dieser Wert wird u.a. für das Tupel $(x, y, z) = (1, 1, -2)$ angenommen.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Setzen wir $\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = a$, so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem

$$x + y = az$$

$$y + z = ax$$

$$z + x = ay.$$

Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten liefert $x - z = a(z - x)$.

- Für $z \neq x$ folgt daraus $a = -1$. Dies liefert für alle drei Gleichungen $x + y + z = 0$, also ist auch die dritte Gleichung erfüllt, und für das gesuchte Produkt ergibt sich der Wert $a^3 = -1$. Dieser Wert wird u.a. für das Tupel $(x, y, z) = (1, 1, -2)$ angenommen.

- Für $z = x$ folgt aus der dritten Gleichung $x = \frac{ay}{2}$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $\frac{ay}{2} + y = a\frac{ay}{2}$. Division durch $\frac{y}{2}$ führt auf die quadratische Gleichung $a^2 - a - 2 = 0$. Diese hat die Lösungen $a_1 = -1$ und $a_2 = 2$. Damit ergibt sich für das gesuchte Produkt als weiterer Wert $a_2^3 = 8$. Dieser Wert wird u.a. für das Tupel $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ angenommen.

(Reinhard Razen) □

Lösung 3. Falls $x = y = z$ gilt, so erhalten wir für das gesuchte Produkt den Wert 8. Nun betrachten wir den Fall, dass nicht alle Variablen gleich sind. O. B. d. A. sei $x \neq y$. Aus der Nebenbedingung erhalten wir die Gleichung

$$\frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Multiplizieren wir mit den Nennern, so folgt

$$y^2 + yz = x^2 + xz,$$

was äquivalent zu

$$x^2 - y^2 = z(y - x)$$

ist. Da $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ und $x - y \neq 0$ ist, können wir $x - y$ kürzen und erhalten $x + y = -z$, also $x + y + z = 0$. Damit ergibt sich für das gesuchte Produkt der Wert -1.

Für $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ bzw. $(x, y, z) = (1, 1, -2)$ werden die Werte 8 bzw. -1 auch angenommen. Damit sind das tatsächlich alle möglichen Werte.

(Michael Reitmeir) □

Lösung 4. Wir addieren zu der Gleichungskette 1 und erhalten

$$\frac{x+y+z}{z} = \frac{x+y+z}{x} = \frac{x+y+z}{y}.$$

Wenn $x + y + z = 0$ ist, dann ist das offensichtlich erfüllt und der Ausdruck, der uns interessiert, wird zu

$$\frac{(-z)(-x)(-y)}{xyz} = -1.$$

Wenn $x + y + z \neq 0$, dann gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$$

und somit $x = y = z$.

In diesem Fall wird der Ausdruck, der uns interessiert, zu 8.

Diese Werte werden auch wirklich angenommen, weil jedes Tripel mit $x + y + z = 0$ bzw. $x = y = z$, in dem kein Nuller vorkommt, auch funktioniert.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 2. *Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge s. Auf den Diagonalen BD und DF liegen die Punkte P bzw. Q derart, dass $BP = DQ = s$ erfüllt ist. Man beweise, dass die drei Punkte C, P und Q auf einer Geraden liegen.*

(Walther Janous)

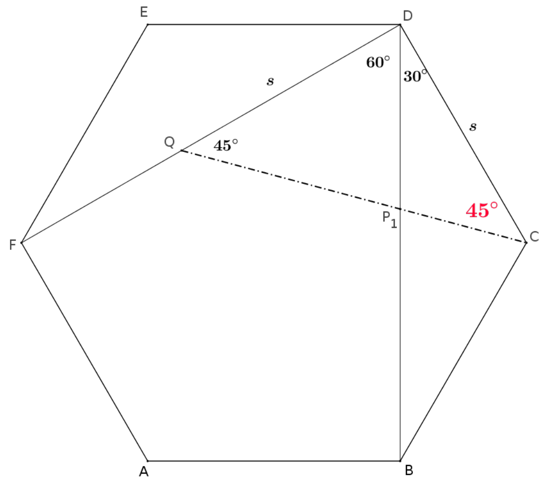


Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Lösung 1. Unsere Strategie ist, die Winkel $\sphericalangle DCQ$ und $\sphericalangle DCP$ auszurechnen, um zu sehen, dass sie gleich groß sind.

Die Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks betragen 120°. Das Dreieck DEF ist gleichschenkelig und daher gilt $\sphericalangle DFE = \sphericalangle EDF = 30°$. Damit erhält man $\sphericalangle QDC = 90°$ und da das Dreieck QDC auch gleichschenkelig ist, folgt

$$\sphericalangle DCQ = 45°.$$

Das Dreieck CBP ist gleichschenkelig und analog zu oben gilt $\sphericalangle CBP = \sphericalangle CBD = 30°$. Daher gilt

$$\sphericalangle PCB = (180° - 30°) : 2 = 75° \quad \text{also} \quad \sphericalangle DCP = 120° - 75° = 45°.$$

Mit der angegebenen Winkelgleichheit ist aber bewiesen, dass die drei Punkte C, P und Q auf einer Geraden liegen.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Es sei o. B. d. A. $s = 1$. Wir verwenden ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung in A und der x-Achse durch den Eckpunkt B. Die Koordinaten der Punkte P, C und Q sind dann

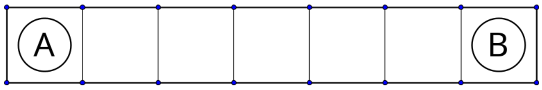
$$P = (1,1), C = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ und } Q = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right).$$

Man rechnet nun leicht nach, dass die Anstiege von CP und PQ gleich $\sqrt{3} - 2$, also gleich groß sind.

(Karl Czakler) □

Aufgabe 3. *Alice und Bob spielen ein Spiel auf einem Streifen aus $n \geq 3$ Quadraten mit zwei Spielsteinen. Zu Beginn befindet sich der Stein von Alice auf dem ersten Feld und der Stein von Bob auf dem letzten Feld. Die Abbildung zeigt die Ausgangsstellung für einen Streifen von $n = 7$ Quadraten.*

Gezogen wird abwechselnd. Ein Zug besteht darin, den eigenen Stein um ein oder um zwei Felder in Richtung des gegnerischen Steins auf ein leeres Feld zu versetzen, ohne den gegnerischen Stein zu



überspringen. Alice macht mit ihrem Stein den ersten Zug. Verloren hat, wer keinen Zug mehr machen kann.

Für welche n kann Bob sicher gewinnen, egal wie Alice spielt? Für welche n kann Alice sicher gewinnen, egal wie Bob spielt?

(Karl Czakler)

Antwort. Bob gewinnt für $n = 3k + 2$ mit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, Alice für alle anderen $n \geq 3$.

Lösung 1. Man überlegt sich leicht, dass für eine Reihe von $n = 3, 4, 6$ oder $n = 7$ Feldern Alice, hingegen für eine Reihe von $n = 5$ oder $n = 8$ Feldern Bob gewinnt.

Alle Reihen mit $n = 2 + 3k$ Feldern sind Gewinnstellungen für Bob, da es ihm immer möglich ist, den Abstand zwischen den beiden Steinen um genau drei zu reduzieren, indem er immer die Zahl des Zuges von Alice auf 3 ergänzt. Somit kann er irgendwann auf die Gewinnstellung $n = 5$ zu kommen.

Für $n = 3k$ gewinnt Alice, wenn sie als ersten Zug ihren Stein um ein Feld vorwärts versetzt. Bob kann dann entweder zwei oder ein Feld weiterziehen, die Anzahl der Felder verringert sich dabei um drei bzw. um zwei. Wir haben wieder eine Gewinnstellung für Alice mit $n = 3k - 3 = 3(k - 1)$ bzw. $n = 3k - 2 = 3(k - 1) + 1$ Feldern.

Für $n = 3k + 1$ gewinnt Alice, wenn sie als ersten Zug ihren Stein um zwei Felder vorwärts versetzt. Bob kann dann entweder zwei oder ein Feld weiterziehen, die Anzahl der Felder verringert sich dabei um vier bzw. um drei. Wir haben wieder eine Gewinnstellung für Alice mit $n = 3k + 1 - 4 = 3(k - 1)$ bzw. $n = 3k + 1 - 3 = 3(k - 1) + 1$ Feldern.

Alice kommt so in beiden Fällen auf eine der beiden Gewinnstellungen $n = 3$ oder $n = 4$. Alle Reihen mit $n = 3k$ oder $n = 3k + 1$ Feldern sind also Gewinnstellungen für Alice.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wir betrachten zuerst kleine Fälle und sehen, dass für 3, 4, 6 oder 7 Felder Alice gewinnt, aber für 5 oder 8 Felder Bob gewinnt. Wir vermuten daher, dass Bob für alle n der Form $3k + 2$ gewinnen kann.

Das beweisen wir mit Induktion. Die wird einfacher aufzuschreiben, wenn wir den Fall $k = 0$, also $n = 2$ auch erlauben. Für $k = 0$ ist das Spiel offensichtlich sofort aus, da auf den beiden Feldern zwei Steine nebeneinanderliegen, die nicht bewegt werden können. Alice verliert also sofort.

Wenn wir annehmen, dass Bob für ein bestimmtes natürliches k das Spiel mit $3k + 2$ Feldern sicher gewinnen kann, dann wollen wir jetzt zeigen, dass er das auch für $3k + 5$ machen kann.

Dazu reicht es, dass Bob in seinem ersten Zug genau das Gegenteil von Alice macht, also 1 zieht, wenn sie 2 gezogen ist, und 2 zieht, wenn sie 1 gezogen ist. Damit verringert sich der Abstand zwischen den beiden Steinen um 3 und das Spiel setzt sich genau so fort, wie wenn ein neues Spiel mit $3k + 2$ Feldern begonnen würde, sodass Bob sicher gewinnen kann.

Somit haben wir bewiesen, dass Bob für alle $n = 3k + 2$ gewinnt.

Jetzt möchten wir noch zeigen, dass Alice für die n der Form $3k$ und $3k + 1$ sicher gewinnen kann.

Im Fall von $3k$ Feldern beginnt sie das Spiel, indem sie 1 zieht, sodass das restliche Spiel auf $3k - 1 = 3(k - 1) + 2$ Feldern stattfindet und Bob den ersten Zug macht, sodass wir schon wissen, dass Alice als zweite Spielerin sicher gewinnen kann.

Im Fall von $3k + 1$ Feldern beginnt sie das Spiel, indem sie 2 zieht, und das restliche Spiel ist wiederum wie ein neues Spiel auf $3(k - 1) + 2$ Feldern, bei dem Bob den ersten Zug macht.

Es gilt also, dass Bob für alle $n = 3k + 2$ sicher gewinnen kann und Alice für alle anderen n sicher gewinnen kann.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle Tripel (a, b, c) von positiven ganzen Zahlen, für die*

$$a! + b! = 2^{c!}$$

gilt.

(Walther Janous)

Antwort. Die einzigen Lösungen sind $(1, 1, 1)$ und $(2, 2, 2)$.

Lösung 1. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \leq b$ annehmen.

- Für $a = b = 1$ erhalten wir $c = 1$, somit ist $(1, 1, 1)$ eine Lösung.
- Für $a = 1$ und $b > 1$ ist die linke Seite größer als 1 und ungerade, kann daher keine Zweierpotenz sein. Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.
- Für $a = b = 2$ erhalten wir $c = 2$, somit ist $(2, 2, 2)$ eine Lösung.
- Für $a = 2$ und $b = 3$ ist $2! + 3! = 8 = 2^3$. Es gibt aber kein c mit $c! = 3$. Somit gibt es in diesem Fall keine Lösung.
- Für $a = 2$ und $b \geq 4$ ist $2! + b! \geq 2! + 4! = 26$. Also muss $c! > 4$ sein. Dann ist aber die linke Seite kongruent zu 2 modulo 4, die rechte dagegen kongruent zu 0 modulo 4. Somit gibt es in diesem Fall keine Lösung.
- Für $a \geq 3$ und $b \geq 3$ ist die linke Seite durch 3 teilbar, die rechte aber als Zweierpotenz nicht. Also gibt es auch in diesem Fall keine Lösung.

(Reinhard Razen) □

Lösung 2. Es sei zunächst $a = b$. Dann gilt $2a! = 2^{c!}$ bzw. $a! = 2^{c!-1}$. Nun ist aber $a!$ nur für $a = 1$ oder $a = 2$ eine Zweierpotenz. Wir erhalten so die Lösungen $(1, 1, 1)$ und $(2, 2, 2)$.
Es sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a < b$. Dann gilt

$$a! + b! = a!(1 + (a + 1) \cdot \ldots \cdot b) = 2^{c!}.$$

Wiederum folgt, dass $a!$ eine Zweierpotenz sein muss, also $a = 1$ oder $a = 2$. Für $a = 1$ wäre der auf $a!$ folgende Klammerausdruck jedoch ungerade und größer als 1, kann daher keine Zweierpotenz sein. Also muss $a = 2$ sein. In diesem Fall ist der Klammerausdruck $(1 + (2 + 1) \cdot \ldots \cdot b)$ nur dann gerade, wenn $b = (2+1) = 3$ ist. Dann ist $2! + 3! = 8 = 2^3$. Es gibt aber kein c mit $c! = 3$. Somit gibt es keine weiteren Lösungen.

(Reinhard Razen) □

Lösung 3. Man sieht sofort, dass es für $c = 1$ nur die Lösung $(1, 1, 1)$ und für $c = 2$ nur die Lösung $(2, 2, 2)$ gibt.
Es sei nun $c \geq 3$, somit $a! + b! = 2^{c!} \geq 2^6$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \leq b$. Für $b \leq 3$ wäre aber $a! + b! \leq 2 \cdot 3! = 12 < 2^6$. Also muss $b \geq 4$ sein und damit ist $b!$ sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar. Für $a = 1$ ist dann aber die linke Seite ungerade und größer als 1, für $a = 2$ ist die linke Seite kongruent zu 2 modulo 4, für $a \geq 3$ ist die linke Seite durch 3 teilbar. All dies ist mit der Zweierpotenz auf der rechten Seite nicht vereinbar. Somit gibt es für $c \geq 3$ keine Lösungen.

(Reinhard Razen) □