# 54. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

24. Mai 2023

1. Sei $\alpha$ eine von 0 verschiedene reelle Zahl. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) + \alpha xy$$

für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$.

*(Walther Janous)*

2. Gegeben sei ein Dreieck $ABC$ mit dem Umkreismittelpunkt $O$. Der Umkreis des Dreiecks $AOC$ schneidet die Seite $BC$ in den Punkten $C$ und $D$ und die Seite $AB$ in den Punkten $A$ und $E$.

Man beweise, dass die Dreiecke $BDE$ und $AOC$ gleich lange Umkreisradien haben.

*(Karl Czakler)*

3. Alice und Bob spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd Strecken der Länge 1 in der euklidischen Ebene zeichnen. Alice beginnt und zeichnet die erste Strecke, danach müssen die Strecken jeweils vom Endpunkt der zuletzt gezeichneten Strecke ausgehen. Dabei ist es nicht erlaubt, eine Strecke so zu zeichnen, dass sie deckungsgleich mit der vorher gezeichneten Strecke ist. Wenn die neue Strecke mit einer der bisherigen Strecken mindestens einen Punkt – abgesehen vom Anfangspunkt der neuen Strecke – gemeinsam hat, dann hat man verloren.

   a) Man zeige, dass sowohl Alice als auch Bob ein Ende des Spieles erzwingen kann, wenn es egal ist, wer gewinnt.

   b) Hat einer der beiden eine Gewinnstrategie?

*(Michael Reitmeir)*

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

# 54. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

25. Mai 2023

4. Auf einer Tafel stehen die 2023 Zahlen

$$2023, 2023, \ldots, 2023.$$

Die Zahlen auf der Tafel werden durch eine Abfolge von Zügen verändert. In jedem Zug wählt man zwei beliebige Zahlen, die auf der Tafel stehen, – wir nennen sie $x$ und $y$ – löscht sie und ersetzt sie durch die Zahl $\frac{x+y}{4}$. Solche Züge werden solange ausgeführt, bis nur noch eine Zahl auf der Tafel steht.

Man beweise, dass diese Zahl immer größer als 1 ist.

*(Walther Janous)*

5. Es sei $ABC$ ein spitzwinkeliges Dreieck mit $AC \neq BC$, $M$ der Mittelpunkt der Seite $AB$, $H$ der Höhenschnittpunkt, $D$ auf $BC$ der Fußpunkt der Höhe durch $A$ und $E$ auf $AC$ der Fußpunkt der Höhe durch $B$.

Man beweise, dass sich die Geraden $AB$, $DE$ und die Normale auf $MH$ durch $C$ in einem Punkt $S$ schneiden.

*(Karl Czakler)*

6. Man untersuche, ob es eine reelle Zahl $r$ gibt, sodass die Gleichung

$$x^3 - 2023x^2 - 2023x + r = 0$$

drei verschiedene rationale Lösungen besitzt.

*(Walther Janous)*

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2023`