46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfänger/innen – Lösungen

9. Juni 2015

Aufgabe 1. *Es seien a, b und c ganze Zahlen, für die die Summe $a^3 + b^3 + c^3$ durch 18 teilbar ist. Man beweise, dass das Produkt abc durch 6 teilbar ist.*

(Karl Czakler)

Lösung 1. Wir müssen zeigen, dass abc durch 2 und durch 3 teilbar ist. Beide Beweise führen wir indirekt.
Angenommen, abc ist ungerade. Dann sind a, b und c ungerade, somit ist auch $a^3 + b^3 + c^3$ ungerade, also nicht durch 18 teilbar. Dieser Widerspruch zeigt, dass abc gerade sein muss.
Angenommen, abc ist nicht durch 3 teilbar. Dann sind a, b und c nicht durch 3 teilbar, liegen also in evtl. verschiedenen der folgenden Restklassen mod 9:

x	1	2	4	-4	-2	-1
x^3	1	-1	1	-1	1	-1

Daraus sehen wir, dass $a^3 + b^3 + c^3$ in einer der Restklassen -3, -1, 1 oder 3 mod 9 liegt, aber nicht in der Restklasse 0. Daher ist $a^3 + b^3 + c^3$ nicht durch 9 und somit auch nicht durch 18 teilbar. Dieser Widerspruch zeigt, dass abc durch 3 teilbar sein muss.

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 2. Weil $a^3 + b^3 + c^3$ durch 18 teilbar ist, ist es sowohl durch 2 als auch durch 9 teilbar.
Wegen $a^3 \equiv a$ modulo 2 gilt: $a + b + c$ ist durch 2 teilbar. Die Summe von drei Zahlen kann nur dann gerade sein, wenn alle drei Zahlen gerade sind oder eine gerade und die anderen beiden ungerade. Es muss also mindestens eine der drei Zahlen a, b oder c gerade sein und daher ist abc gerade.
Modulo 9 gibt es für a^3 nur drei Möglichkeiten: $a^3 \equiv 0$ oder 1 oder 8, und $a^3 \equiv 0$ gilt genau dann, wenn a durch 3 teilbar ist. Wenn die Summe von drei Zahlen kongruent 0 sein soll, gibt es genau zwei Möglichkeiten: $0 + 0 + 0$ oder $0 + 1 + 8$. Daher muss mindestens eine der drei Zahlen a, b oder c durch 3 teilbar sein und daher auch abc.
Da abc durch 2 und durch 3 teilbar ist, ist es auch durch 6 teilbar, was zu beweisen war.

(Richard Henner) □

Aufgabe 2. *Für die positiven reellen Zahlen x und y gilt die Bedingung $xy = 4$.
Man beweise, dass die Ungleichung*

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \le \frac{2}{5}$$

gilt. Für welche x, y tritt Gleichheit ein?

(Walther Janous)

Lösung 1. Beseitigung der Nenner führt auf die äquivalente Ungleichung

$$5x + 5y + 30 \le 2xy + 6x + 6y + 18,$$

das heißt $x + y \ge 12 - 2xy = 4$. Diese Ungleichung folgt aber aus der arithmetisch–geometrischen Mittelungleichung

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy} = 2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = y = 2$.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wie in Lösung 1 erhalten wir die äquivalente Ungleichung $x + y \geq 4$. Mit $y = \frac{4}{x}$ ergibt sich aber

$$x + y - 4 = x + \frac{4}{x} - 4 = \frac{x^2 + 4 - 4x}{x} = \frac{(x-2)^2}{x} \geq 0$$

mit Gleichheit genau für $x = 2$, also auch $y = 2$.

(Walther Janous) □

Lösung 3. Wir homogenisieren die Ungleichung, das heißt wir „beseitigen" die Bedingung $xy = 4$. Dafür setzen wir $x = a^2$ und $y = b^2$ mit $a, b > 0$ samt $ab = 2$. Die Ungleichung lautet damit in äquivalenter Form

$$\frac{2}{2a^2 + 3 \cdot 2} + \frac{2}{2b^2 + 3 \cdot 2} \leq \frac{2}{5}, \qquad \text{also} \qquad \frac{ab}{2a^2 + 3ab} + \frac{ab}{2b^2 + 3ab} \leq \frac{2}{5},$$

$$\text{das heißt} \qquad \frac{5b}{2a + 3b} + \frac{5a}{2b + 3a} \leq 2 \qquad \text{für } a,\, b > 0. \tag{1}$$

Um diese Ungleichung nachzuweisen setzen wir $t := 2a + 3b > 0$ und $s := 2b + 3a > 0$. Daraus ergeben sich unmittelbar $5a = 3s - 2t$ und $5b = 3t - 2s$ und (1) wird zu

$$\frac{3t - 2s}{t} + \frac{3s - 2t}{s} \leq 2 \iff 6 - 2\left(\frac{t}{s} + \frac{s}{t}\right) \leq 2 \iff \frac{t}{s} + \frac{s}{t} \geq 2 \iff (s - t)^2 \geq 0.$$

Gleichheit ergibt sich genau für $s = t$, das heißt $a = b$ und $x = y = 2$.

(Walther Janous) □

Lösung 4. Durch Elimination von $y = \dfrac{4}{x}$ erhalten wir

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{y+3} = \frac{2}{5} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{\frac{4}{x} + 3} = \frac{2}{5} - \frac{1}{x+3} - \frac{x}{4 + 3x} =$$

$$= \frac{2(x+3)(4+3x) - 5(4+3x) - 5x(x+3)}{5(x+3)(4+3x)} = \frac{x^2 - 4x + 4}{5(x+3)(4+3x)} = \frac{(x-2)^2}{5(x+3)(4+3x)} \geq 0$$

mit Gleichheit genau für $x = 2 = y$.

(Gerhard Kirchner) □

Aufgabe 3. *Anton wählt eine beliebige ganze Zahl $n \geq 0$, die keine Quadratzahl ist, als Startzahl. Berta addiert dazu die nächstgrößere ganze Zahl $n + 1$. Ist die Summe eine Quadratzahl, so hat sie gewonnen. Andernfalls addiert Anton zur Summe die nächstgrößere ganze Zahl $n + 2$. Ist die Summe eine Quadratzahl, so hat er gewonnen. Andernfalls ist wieder Berta am Zug und addiert die nächstgrößere ganze Zahl $n + 3$, und so weiter.*
Man zeige, dass es unendlich viele Startzahlen gibt, mit denen Anton gewinnt.

(Richard Henner)

Lösung 1. Wenn man den Spielverlauf mit der kleinstmöglichen Startzahl 2 ausprobiert, erhält man A: 2, B: 5, A: 9 und erkennt, dass es möglich ist, dass Anton schon bei der dritten Zahl gewinnt.
Jede durch 3 teilbare Zahl $3x$ lässt sich in der Form $3x = (x - 1) + x + (x + 1)$ als Summe dreier aufeinander folgender Zahlen schreiben. Jede durch 3 teilbare Quadratzahl ist auch durch 9 teilbar und lässt sich daher in der Form $9x^2 = (3x^2 - 1) + 3x^2 + (3x^2 + 1)$ als Summe dreier aufeinander folgender Zahlen schreiben. Daher gibt es folgende Taktik für Anton:
Anton wählt eine beliebige positive ganze Zahl x und hat dafür unendlich viele Möglichkeiten. Dann wählt er $n = 3x^2 - 1$ als Startzahl. $3x^2 - 1$ liegt in der Restklasse 2 modulo 3 und ist daher keine Quadratzahl. Berta addiert die nächste ganze Zahl $3x^2$ und erhält als Summe $6x^2 - 1$. Diese Zahl liegt auch in der Restklasse 2 modulo 3 und ist daher keine Quadratzahl. Anton addiert die nächste ganze Zahl $3x^2 + 1$ und erhält als Summe $9x^2 = (3x)^2$, also eine Quadratzahl. Damit hat er gewonnen.

(Richard Henner) □

Lösung 2. Wenn man den Spielverlauf mit der Startzahl 3 ausprobiert, erhält man A: 3, B: 7, A: 12, B: 18, A: 25, und erkennt, dass es möglich ist, dass Anton bei der fünften Zahl gewinnt.
Jede durch 5 teilbare Zahl $5x$ lässt sich in der Form $5x = (x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)$ als Summe von fünf aufeinander fokgenden Zahlen schreiben. Jede durch 5 teilbare Quadratzahl ist auch durch 25 teilbar und lässt sich daher in der Form $25x^2 = (5x^2-2)+(5x^2-1)+5x^2+(5x^2+1)+(5x^2+2)$ als Summe von fünf aufeinander folgenden Zahlen schreiben. Daher gibt es folgende Taktik für Anton:
Anton wählt eine beliebige positive ganze Zahl x und hat dafür unendlich viele Möglichkeiten. Dann wählt er $n = 5x^2 - 2$ als Startzahl. $5x^2 - 2$ liegt in der Restklasse 3 modulo 5 und ist daher keine Quadratzahl. Berta addiert die nächste ganze Zahl $5x^2 - 1$ und erhält als Summe $10x^2 - 3$. Diese Zahl liegt in der Restklasse 2 modulo 5 und ist daher keine Quadratzahl. Anton addiert die nächste ganze Zahl $5x^2$ und erhält die Summe $15x^2 - 3$, die auch in der Restklasse 2 modulo 5 liegt. Berta addiert dann $5x^2 + 1$ und erhält als Summe $20x^2 - 2$, eine Zahl, die wieder in der Restklasse 3 modulo 5 liegt. Anton addiert dann $5x^2 + 2$ und erhält als Summe $25x^2 = (5x)^2$, also eine Quadratzahl. Damit hat er gewonnen.

(Richard Henner) □

Bemerkungen:

- Wenn man den Spielverlauf mit der Startzahl 12 ausprobiert, erhält man A: 12, B: 25, und erkennt, dass Berta gewinnt, wenn Anton eine ungünstige Zahl wählt.

  Allgemein lässt sich jede ungerade Quadratzahl so als Summe schreiben: $(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1 = (2x^2+2x)+(2x^2+2x+1)$ und Berta gewinnt also, wenn $2x^2+2x$ keine Quadratzahl ist und Anton diese Zahl als Startzahl wählt. Berta hat also auch unendlich viele Möglichkeiten, zu gewinnen. Sie kann es nur leider selber nicht entscheiden.

- Wegen $\sum_{i=0}^{2n-2} (n+i) = (2n-1)^2$ kommt jedes Spiel spätestens in der $(2n-1)$–ten Runde zu einer Quadratzahl. Da in dieser Runde Anton eine Zahl addiert, könnte man die falsche Meinung vertreten, dass Anton immer gewinnt. Dass das nicht der Fall ist, zeigt die erste Bemerkung. Auch für $n = 35$ endet das Spiel mit der Zahl 225 in der sechsten Runde und Berta gewinnt. Jedenfalls erkennt man aber, dass es kein Unentschieden geben kann.

Aufgabe 4. *Der Kreis k_2 berührt den Kreis k_1 von innen im Punkt X. Der Punkt P liegt auf keiner der beiden Kreislinien und nicht auf der Geraden durch die beiden Kreismittelpunkte. Der Punkt N_1 ist jener Punkt auf k_1, der P am nächsten liegt, und F_1 ist jener Punkt auf k_1, der von P am weitesten entfernt ist. Analog ist der Punkt N_2 jener Punkt auf k_2, der P am nächsten liegt, und F_2 ist jener Punkt auf k_2, der von P am weitesten entfernt ist.*
Man beweise, dass $\sphericalangle N_1XN_2 = \sphericalangle F_1XF_2$ gilt.

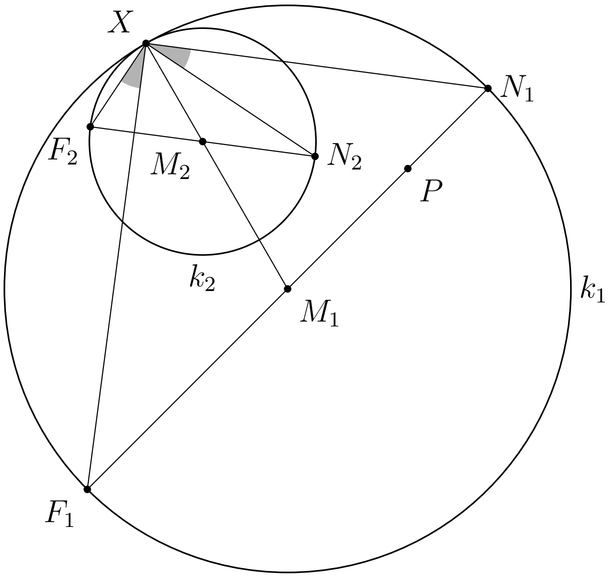
(Robert Geretschläger)

Lösung. Die Punkte N_1 und F_1 liegen auf einem Durchmesser des Kreises k_1 durch den Punkt P. Analog liegen die Punkte N_2 und F_2 auf einem Durchmesser des Kreises k_2 durch P.
Daher gilt mit dem Satz von Thales $\sphericalangle N_1XF_1 = 90°$ und $\sphericalangle N_2XF_2 = 90°$.
Setzt man $\sphericalangle N_2XF_1 = \alpha$, dann gilt

$$\sphericalangle N_1XN_2 = 90° - \alpha \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle F_1XF_2 = 90° - \alpha.$$

Damit ist die Winkelgleichheit bewiesen.

(Karl Czakler) □


X
N_1
F_2
M_2
N_2
P
k_2
k_1
M_1
F_1