46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

20.–21. Mai 2015

Aufgabe 1. *Es sei $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $f(1) = 0$,

(ii) $f(p) = 1$ *für alle Primzahlen* p,

(iii) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ *für alle* x, y *in* $\mathbb{Z}_{>0}$.

Man bestimme die kleinste ganze Zahl $n \geq 2015$, *die* $f(n) = n$ *erfüllt.*

(Gerhard J. Woeginger)

Lösung 1.

1. Man betrachtet die Hilfsfunktion $g(x) = f(x)/x$, die die Gleichung $g(xy) = g(x) + g(y)$ erfüllt. Die Anfangsbedingungen übersetzen sich in $g(1) = 0$ und $g(p) = 1/p$ für Primzahlen p.

2. Hat n die Primfaktorzerlegung $x = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$, so gilt wegen der Funktionalgleichung von g, dass
$$g(x) = g\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} e_i g(p_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{e_i}{p_i}. \tag{1}$$
Andererseits überprüft man leicht, dass die durch (1) gegebene Funktion g die Funktionalgleichung erfüllt.

3. $f(n) = n$ ist äquivalent zu $g(n) = 1$ und
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{e_i}{p_i} = 1. \tag{2}$$
Wenn man die Gleichung mit dem Produkt aller p_i multipliziert, so sieht man, dass
$$e_j p_1 \cdots p_{j-1} p_{j+1} \cdots p_k = a p_j$$
für eine passende ganze Zahl a gilt. Da p_j teilerfremd zu $p_1 \cdots p_{j-1} p_{j+1} \cdots p_k$ ist, folgt $p_j \mid e_j$ für $1 \leq j \leq k$. Damit gilt auch $p_j \leq e_j$ für $1 \leq j \leq k$. Aus (2) folgt andererseits, dass $e_j \leq p_j$ gilt, wobei Gleichheit nur eintritt, wenn es sich um den einzigen Summanden in (2) handelt. Daher hat n nur einen einzigen Primteiler p, und es gilt $n = p^p$.

4. Die kleinste Zahl $n = p^p$ mit $n \geq 2015$ ist $n = 5^5 = 3125$.

(Gerhard J. Woeginger) □

Lösung 2. Zunächst stellen wir einige Experimente an und hoffen, ein Muster zu erkennen. Seien p, q, r, s vier (nicht notwendigerweise verschiedene) Primzahlen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(p) &= 1, \\
f(pq) &= pf(q) + qf(p) \\
&= p + q, \\
f(pqr) &= pqf(r) + rf(pq) \\
&= pq + r(p+q) \\
&= pqr \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right).
\end{aligned}$$

Wir vermuten daher, dass jede Zahl n mit Primfaktorzerlegung $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ den Funktionswert

$$f(n) = n \cdot \left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k}\right) \tag{3}$$

hat und beweisen dies mittels Vollständiger Induktion nach der Anzahl der (nicht notwendigerweise verschiedenen) Primfaktoren:

1. Induktionsbasis: Für alle n mit bis zu drei Primfaktoren, also $\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq 3$, haben wir das zuvor bereits bewiesen (gegebenenfalls nach dem Zusammenzählen gleicher Brüche um dieselbe Darstellung zu erhalten).

2. Induktionsvoraussetzung: Es gelte (3) für alle n mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq K$.

3. Induktionsschritt: Wir wollen zeigen, dass (3) dann auch für alle n mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i = K + 1$ gilt.

   Sei $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ eine solche Zahl mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i = K + 1$. Wir spalten einen Teiler p_1 ab und erhalten eine ganze Zahl $\frac{N}{p_1} = p_1^{\alpha-1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ mit K Primfaktoren, wodurch wir die Induktionsvoraussetzung darauf anwenden dürfen.

   Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(N) = f\left(p_1 \cdot \frac{N}{p_1}\right) &= \frac{N}{p_1} \cdot f(p_1) + p_1 f\left(\frac{N}{p_1}\right) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{N}{p_1} + p_1 \cdot \frac{N}{p_1} \cdot \left(\frac{\alpha_1 - 1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k}\right) \\
&= N \cdot \left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k}\right)
\end{aligned}$$

   und die Vollständige Induktion ist abgeschlossen.

Durch Einsetzen von (3) in der Angabe können wir leicht überprüfen, dass die so definierte Funktion f alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Somit ist diese Funktion die einzige Lösung der Funktionalgleichung.

Sei N nun eine Zahl, für die $f(N) = N$ gilt, woraus wir die äquivalente Bedingung

$$N = f(N) = N \cdot \left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k}\right) \qquad \Big| : N \tag{4}$$

$$\iff \quad 1 = \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k} \tag{5}$$

ableiten können.

Für jedes $1 \le x \le k$ multiplizieren wir beide Seiten mit $p_1p_2\cdots p_k$ und betrachten die Gleichung modulo p_x, wodurch wir die Bedingung

$$\begin{aligned} \text{mod } p_x: \qquad\qquad & p_1p_2\cdots p_k \equiv \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{p_1p_2\cdots p_k}{p_i} \\ \Longrightarrow \quad & 0 \equiv 0 + 0 + \cdots + \alpha_x \frac{p_1p_2\cdots p_k}{p_x} + \cdots + 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 \equiv \alpha_x p_1p_2\cdots p_{x-1}p_{x+1}\cdots p_k \end{aligned}$$

erhalten. Da die anderen p_i alle relativ prim zu p_x sind, muss $\alpha_x \equiv 0 \pmod{p_x}$ gelten.

Für alle i gilt daher $\alpha_i = p_i \cdot \beta_i$ mit positiven ganzen Zahlen β_i (da in einer Primfaktorisierung alle $\alpha_i > 0$ sind). Setzen wir dies in (5) ein, so erhalten wir die Bedingung

$$1 = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k.$$

Da alle β_i positive ganze Zahlen sind, kann das nur gelten, wenn es nur ein einziges β_i gibt und dieses gleich 1 ist. Daher hat N die Form $N = p^p$ für eine Primzahl p.

Es gilt $2^2 = 4$, $3^3 = 27$ und $5^5 = 3125$. Da p^p für $p \ge 1$ streng monoton wachsend ist, brauchen wir keine größeren Primzahlen mehr zu betrachten, und 3125 ist die kleinste Zahl N, die die Bedingung $f(N) = N$ erfüllt.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2a. Wenn man (zahlentheoretische) multiplikative Funktionen vor Augen hat, so wird man versucht sein, zunächst $f(p^k)$ für Primzahlen p und $k \ge 0$ zu bestimmen und dann erst auf beliebige zusammengesetzte Zahlen zu erweitern. Man erkennt dabei nicht nur die Produktregel der Differentiation in der gegebenen Funktionalgleichung wieder, sondern freut sich auch an der Formel $f(p^k) = kp^{k-1}$.

Somit: Für eine Primzahl p und ein $k \ge 0$ beweisen wir durch vollständige Induktion, dass $f(p^k) = kp^{k-1}$. Für $k = 0$ steht das in der Angabe. Gilt die Behauptung für ein k, so gilt laut Funktionalgleichung

$$f(p^{k+1}) = f(pp^k) = p^k f(p) + pf(p^k) = p^k + pkp^{k-1} = (k+1)p^k,$$

was zu beweisen war.

Seien nun $p_1, \ldots, p_r$ verschiedene Primzahlen und $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ positive ganze Zahlen. Wir behaupten, dass dann

$$f(p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}) = p_1^{\alpha_1}\cdots p^{\alpha_r} \sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_j}{p_j}$$

gilt.

Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion nach der Anzahl r der verschiedenen Primfaktoren. Für $r = 1$ stimmt das nach dem obigen Resultat. Den Induktionsschritt erbringen wir über die Funktionalgleichung mittels

$$\begin{aligned} f(p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}) &= p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} f(p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}) + p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r} f(p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}) \\ &= p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_j}{p_j} + p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}\alpha_{r+1}p_{r+1}^{\alpha_{r+1}-1} \\ &= p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \sum_{j=1}^{r+1} \frac{\alpha_j}{p_j}. \end{aligned}$$

Weiter dann wie in den übrigen Lösungen.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3.

1. Wir behaupten zunächst, dass $f(n) \geq 1$ für alle $n \geq 2$ gilt.

   Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion über n. Wenn n eine Primzahl ist, so gilt $f(n) = 1$ nach Voraussetzung. Andernfalls kann man n in der Gestalt $n = pm$ für eine Primzahl p und ein $m \geq 2$ darstellen. Damit gilt nach Induktionsvoraussetzung $f(n) = f(pm) = mf(p) + pf(m) \geq m + p \geq 1$.

2. Wir behaupten nun, dass $f(n) = n$ nur gelten kann, wenn n eine Primzahlpotenz ist.

   Wir nehmen indirekt an, dass $f(n) = n$ für ein $n = xy$ mit teilerfremden $x \geq 2$ und $y \geq 2$ gilt. Daraus erhalten wir
   $$xy = n = f(n) = f(xy) = yf(x) + xf(y), \tag{6}$$
   woraus $x \mid yf(x)$ und wegen $\operatorname{ggT}(x, y) = 1$ auch $x \mid f(x)$ folgt. Da $f(x) \geq 1$, folgt daraus $f(x) \geq x$. Somit folgt aus (6), dass
   $$xy = yf(x) + xf(y) \geq xy + x,$$
   ein Widerspruch.

3. Sei p eine Primzahl und $k \geq 0$. Wir behaupten, dass dann $f(p^k) = kp^{k-1}$ gilt.

   Wir beweisen das durch vollständige Induktion nach k. Für $k = 0$ steht das in der Angabe. Gilt die Behauptung für ein k, so gilt laut Funktionalgleichung
   $$f(p^{k+1}) = f(pp^k) = p^k f(p) + pf(p^k) = p^k + pkp^{k-1} = (k+1)p^k,$$
   was zu beweisen war.

Wenn nun $f(n) = n$ gilt, so folgt $n = p^k$ für eine Primzahl p und ein $k \geq 0$ und damit $p^k = f(p^k) = kp^{k-1}$, woraus unmittelbar $k = p$ folgt. Somit muss $n = p^p$ gelten. In diesem Fall gilt auch tatsächlich $f(n) = n$.

Da $2^2 = 4 < 3^3 = 27 < 2015 < 5^5 = 3125 < p^p$ für $p > 5$, ist 3125 das kleinste n, sodass $f(n) = n$ gilt.

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 4.

1. Zuerst zeigen wir die Formel
   $$f(n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{q_i}, \qquad \text{wobei } n = q_1 \cdots q_k \text{ mit beliebigen Primzahlen } q_1, \ldots, q_k. \tag{7}$$
   Wir beweisen die Behauptung (7) durch vollständige Induktion über k. Für $k = 0$ und $k = 1$ folgt dies aus den Bedingungen (i) bzw. (ii). Im Induktionsschritt $k \to k+1$ sei $n := q_1 \cdots q_{k+1}$, wir verwenden Bedingung (iii) sowie die Induktionsannahme für $m = q_1 \cdots q_k$:
   $$f(n) = f(mq_{k+1}) = mf(q_{k+1}) + q_{k+1}f(m) = m + q_{k+1}\sum_{i=1}^{k} \frac{m}{q_i} = \frac{n}{q_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{q_i} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{n}{q_i}.$$

2. Die Bedingung $f(n) = n$ ist also für $n = q_1 \cdots q_k$ äquivalent zu
   $$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i} = 1, \qquad \text{wobei } q_1, \ldots, q_k \text{ beliebige Primzahlen sind.} \tag{8}$$

Insbesondere folgt aus der GHMU, dass

$$\sqrt[k]{n} = \sqrt[k]{q_1 \cdots q_k} = \mathrm{GM}(q_1, \dots, q_k) \geq \mathrm{HM}(q_1, \dots, q_k) = \frac{k}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{q_i}} = k,$$

das bedeutet

$$n \geq k^k, \qquad \text{wenn } f(n) = n = q_1 \cdots q_k \text{ mit Primzahlen } q_1, \dots, q_k.$$

Dabei ist $n = k^k$ nur möglich für $q_1 = \cdots = q_k$ prim, das bedeutet wegen (8) $\frac{k}{q_1} = 1$, also $k = q_1$ und $n = q_1^{q_1}$. Im Fall $k = 5$ erhalten wir $n = 5^5 = 3125$, diese Zahl erfüllt also $f(n) = n$, und es bleibt zu zeigen, dass es kein n mit $2015 \leq n \leq 3125$ gibt, sodass $f(n) = n$.

3. Nach den obigen Überlegungen bleiben nur mehr die Fälle $0 \leq k \leq 4$ zu untersuchen, wobei für $k = 0$ und $k = 1$ offensichtlich keine Lösung von (8) existiert. Nach Multiplikation mit $\prod_{j=1}^{k} q_j$ lautet die Gleichung (8)
$$\sum_{i=1}^{k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} q_j = \prod_{j=1}^{k} q_j. \tag{9}$$
Angenommen, q_i wäre von allen anderen q_j, $j \neq i$, verschieden. Dann wäre die rechte Seite von (9) durch q_i teilbar, auf der linken Seite alle Summanden außer $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} q_j$, insgesamt wäre die linke Seite nicht durch q_i teilbar. Dieser Widerspruch zeigt, dass unter den Primzahlen $q_1, \dots, q_k$ keine nur einmal auftritt.

4. Für $k = 2$ folgt $q_1 = q_2 = 2$, also $n = 2^2 = 4 < 2015$. Ebenso folgt für $k = 3$, dass $q_1 = q_2 = q_3 = 3$, also $n = 3^3 < 2015$. Im Fall $k = 4$ ergibt $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 4$ keine Primzahl. Somit ist (bis auf die Reihenfolge) $q_1 = q_2 \neq q_3 = q_4$ mit $\frac{2}{q_1} + \frac{2}{q_3} = 1$ die letzte Möglichkeit. Aus $2(q_1 + q_3) = q_1 q_3$ folgt aber, dass die rechte Seite gerade ist, das heißt (o. B. d. A.) $q_1 = 2$. Das steht aber im Widerspruch zu $2(2 + q_3) > 2q_3$. Somit gibt es im Bereich $2015 \leq n \leq 5^5 = 3125$ keine n, sodass $f(n) = n$. Also ist 3125 die gesuchte Zahl.

(Gerhard Kirchner) □

Aufgabe 2. *Gegeben sei ein Dreieck ABC. Der Mittelpunkt der Seite AB heiße M.*

Es sei P ein Punkt im Inneren des Dreiecks. Die Spiegelung von P an M ergebe den Punkt Q.

Weiters seien D und E die Schnittpunkte der Geraden AP bzw. BP mit den Seiten BC bzw. AC.

Man beweise, dass die Punkte A, B, D und E genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$ gilt.

(Karl Czakler)

Lösung 1.

1. Es sei $ABDE$ ein Sehnenviereck. Wir setzen $\beta := \sphericalangle CBA$, $\varphi := \sphericalangle DBE$ und $\varepsilon := \sphericalangle BAD$, vgl. Abbildung 1. Da BQ aus AP durch Spiegelung an M hervorgeht, sind AP und BQ parallel und gleich lang. Daher gilt $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle BAD = \varepsilon$. Nach dem Peripheriewinkelsatz über den Sehnen DB bzw. ED gelten $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BED = \varepsilon$ sowie $\sphericalangle DBE = \sphericalangle DAE = \varphi$. Da $ABDE$ ein Sehnenviereck ist und $\sphericalangle DEA$ daher der Supplementärwinkel von $\sphericalangle DBA$ ist, gilt $\sphericalangle DEC = \sphericalangle DBA = \beta$. Somit gilt $\sphericalangle PEC = \sphericalangle QBC = \beta + \varepsilon$.

   Um zu zeigen, dass die Dreiecke EPC und BQC ähnlich sind, genügt es daher zu zeigen, dass
$$EP : BQ = EC : BC$$

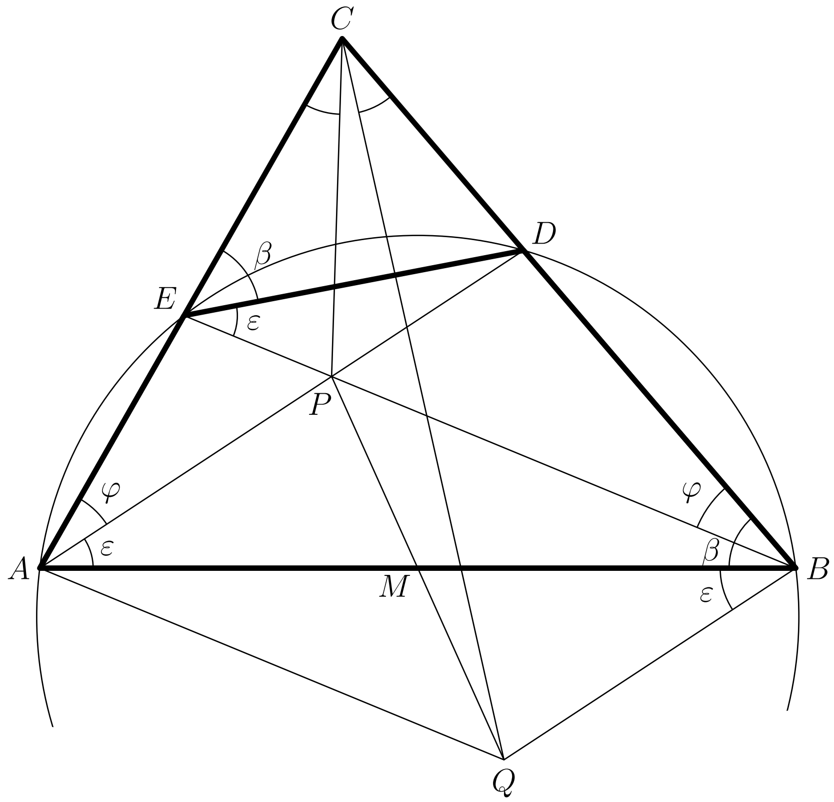

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1, erste Richtung

gilt.

Wegen $AP = BQ$ ist diese Gleichung äquivalent zu

$$EP : AP = EC : BC.$$

Mit dem Sinussatz im Dreieck APE gilt

$$EP : AP = \sin\varphi : \sin(180^\circ - (\beta + \varepsilon)) = \sin\varphi : \sin(\beta + \varepsilon)$$

und mit dem Sinussatz im Dreieck BEC gilt

$$EC : BC = \sin\varphi : \sin(\beta + \varepsilon).$$

Somit sind die Dreiecke EPC und BQC ähnlich und daher die Winkel $\sphericalangle ACP$ und $\sphericalangle QCB$ gleich.

2. Es sei nun umgekehrt $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ =: \rho$, vgl. Abbildung 2. Wir führen folgende weiteren Bezeichnungen ein: $\sphericalangle CAP =: \varphi$, $\sphericalangle CBP =: \psi$ und $\sphericalangle PAQ =: \delta$. Da BQ aus AP durch Spiegelung an M hervorgeht, ist $APBQ$ ein Parallelogramm und es gilt $\sphericalangle PBQ = \delta$.

   Wir wollen $\varphi = \psi$ zeigen, dann ist das Viereck $ABDE$ ein Sehnenviereck.

   Da AD parallel zu BQ ist, gilt $\sphericalangle CBQ = \sphericalangle CDA = \delta + \psi$.

   Mit dem Sinussatz im Dreieck APC gilt

$$CP : AP = \sin\varphi : \sin\rho.$$

   Mit dem Sinussatz im Dreieck CQB gilt

$$CQ : BQ = \sin(\delta + \psi) : \sin\rho.$$

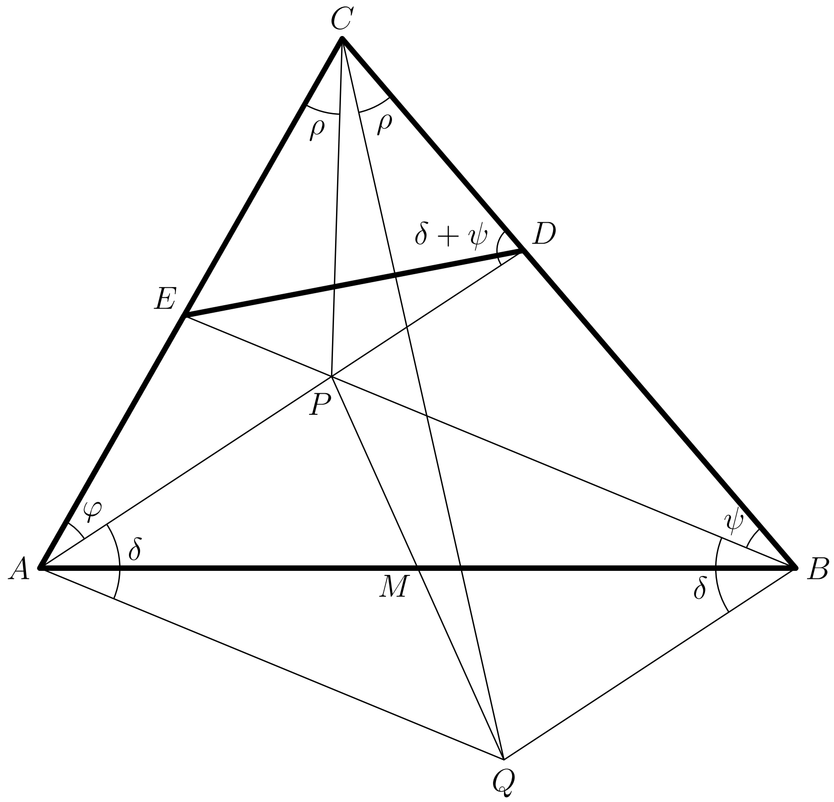

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 1, zweite Richtung

Daraus folgt mit $AP = BQ$

$$CP : CQ = \sin\varphi : \sin(\delta + \psi).$$

Mit dem Sinussatz im Dreieck ACD folgt

$$CD : AC = \sin\varphi : \sin(\delta + \psi).$$

Daher gilt

$$CP : CD = CQ : AC,$$

also sind die Dreiecke CDP und CAQ wegen $\sphericalangle PCD = \sphericalangle ACQ$ ähnlich und daraus folgt $\varphi + \delta = \psi + \delta$ und somit $\varphi = \psi$.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wie in Lösung 1 sehen wir, dass $AQBP$ ein Parallelogramm ist. Wir bezeichnen nun die Längen der Strecken AQ, BQ, CQ und CP mit a, b, s bzw. t, vgl. Abbildung 3. Weiters seien die Winkel $\sphericalangle CAP$, $\sphericalangle CBP$, $\sphericalangle ACP$, $\sphericalangle BCQ$, $\sphericalangle PCQ$ und $\sphericalangle QAP$ mit φ_1, φ_2, γ_1, γ_2, δ bzw. α bezeichnet. Es gilt daher auch $\sphericalangle QBP = \alpha$, $BP = a$ und $AP = b$.

Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes im Sehnenviereck $ABDE$ ist die Behauptung äquivalent zu

$$\gamma_1 = \gamma_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2.$$

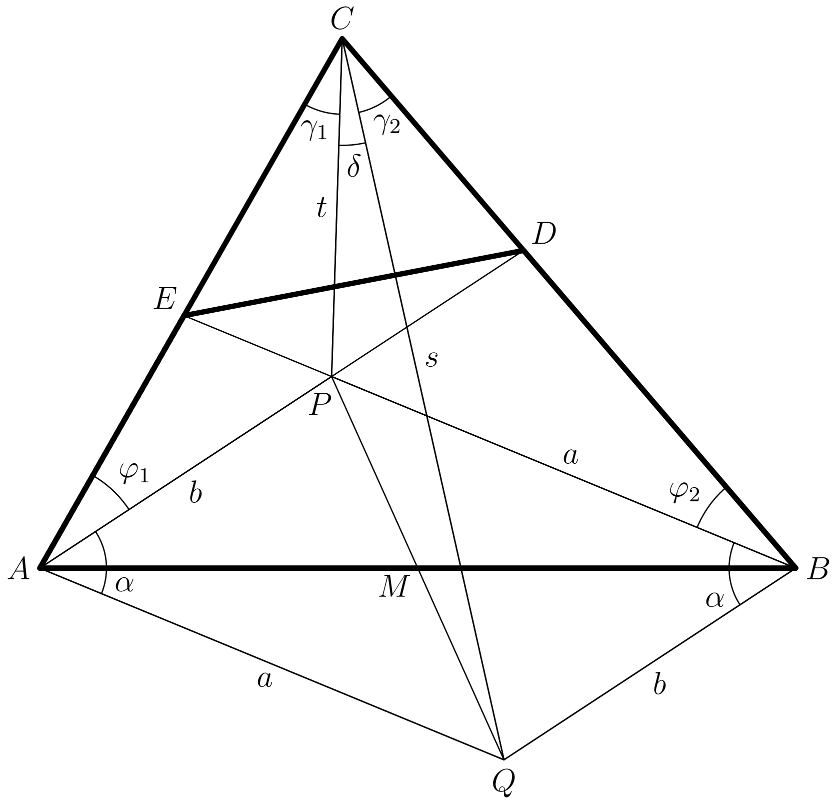

Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 2

Mittels Sinussatz erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{b}{t} &= \frac{\sin\gamma_1}{\sin\varphi_1},\\ \frac{t}{a} &= \frac{\sin\varphi_2}{\sin(\delta+\gamma_2)},\\ \frac{a}{s} &= \frac{\sin(\delta+\gamma_1)}{\sin(\alpha+\varphi_1)},\\ \frac{s}{b} &= \frac{\sin(\alpha+\varphi_2)}{\sin\gamma_2}.\end{aligned}$$

Bei Multiplikation der vier Gleichungen fallen alle Längen weg und wir erhalten

$$\frac{\sin\gamma_1\sin(\delta+\gamma_1)}{\sin\gamma_2\sin(\delta+\gamma_2)} = \frac{\sin\varphi_1\sin(\alpha+\varphi_1)}{\sin\varphi_2\sin(\alpha+\varphi_2)}.$$

Wir wenden auf beiden Seiten im Zähler und im Nenner die Formel

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

an und erhalten

$$\frac{\cos\delta-\cos(\delta+2\gamma_1)}{\cos\delta-\cos(\delta+2\gamma_2)} = \frac{\cos\alpha-\cos(\alpha+2\varphi_1)}{\cos\alpha-\cos(\alpha+2\varphi_2)}.$$

Es genügt zu zeigen, dass die Terme auf den jeweiligen Seiten nur gleich 1 sein können, wenn $\gamma_1=\gamma_2$ bzw. $\varphi_1=\varphi_2$ gilt. Da aber $\cos(\delta+2\gamma_1)=\cos(\delta+2\gamma_2)$ genau dann, wenn $\gamma_1=\gamma_2+k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ oder $\delta+\gamma_1+\gamma_2=k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ gilt, und $\delta+\gamma_1+\gamma_2=\sphericalangle ACB\in(0,\pi)$, ist $\gamma_1=\gamma_2$ die einzige Möglichkeit.

Auf der rechten Seite muss man nach derselben Überlegung nur $\alpha+\varphi_1+\varphi_2$ untersuchen. Wegen der Ähnlichkeit von APB und BQA gilt $\sphericalangle PAB+\sphericalangle PBA=\sphericalangle PAB+\sphericalangle QAB=\alpha$, und somit $\alpha+\varphi_1+\varphi_2=\sphericalangle CAB+\sphericalangle ABC\in(0,\pi)$ als Summe von zwei Winkeln in einem Dreieck.

Damit ist alles bewiesen.

(Gerhard Kirchner) $\square$

Lösung 3.

Lemma. Sei $ABDE$ ein Sehnenviereck, C der Schnittpunkt von AE und BD und P der Schnittpunkt der Diagonalen AD und BE. Weiters sei BQ parallel zu AP, sodass QC die Strecke AB schneidet.

Dann gilt $BQ = AP$ genau dann, wenn $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$.

Beweis des Lemmas. Wir wählen F auf der Seite AC so, dass $FD \parallel EP$, vgl. Abbildung 4. Wir

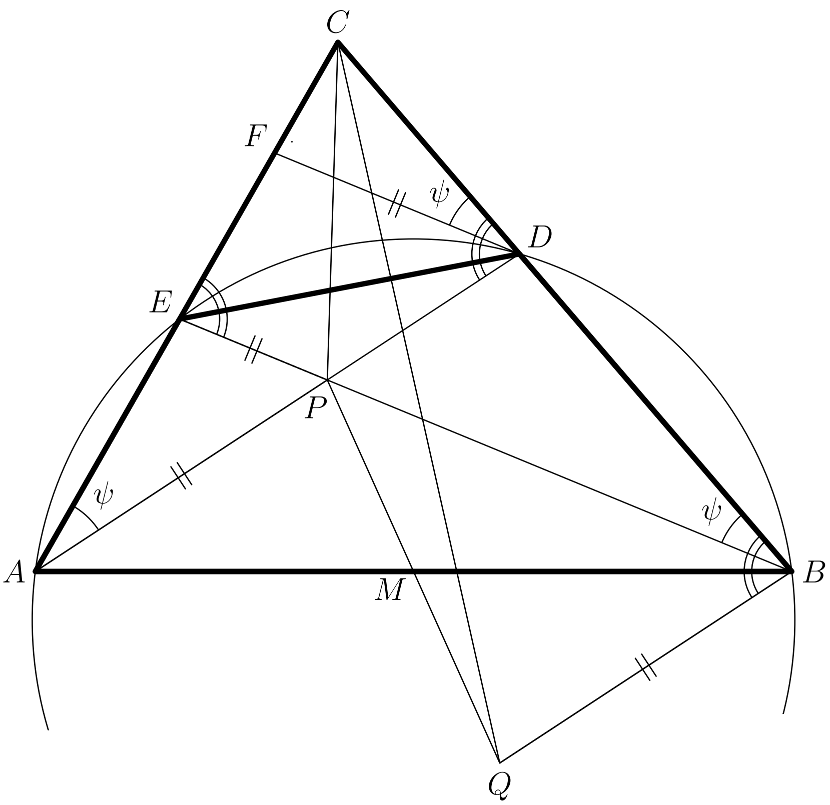

Abbildung 4: Aufgabe 2, Lösung 3, Beweis des Lemmas

setzen $\psi := \sphericalangle PAC$. Nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne ED gilt $\sphericalangle CBP = \sphericalangle PAC = \psi$. Da $FD \parallel EP$, gilt auch $\sphericalangle CDF = \psi$. Damit erhalten wir unmittelbar die ähnlichen Dreiecke

$$CEB \sim CFD \sim CDA.$$

Daraus folgt sofort $\sphericalangle BEC = \sphericalangle ADC$ und wegen $AD \parallel BQ$ auch $\sphericalangle PEC = \sphericalangle QBC$. Weiters folgen aus der Ähnlichkeit die Verhältnisse

$$\begin{aligned} \frac{FD}{CD} &= \frac{EB}{CB}, \\ \frac{EB}{CE} &= \frac{DA}{CD}. \end{aligned} \tag{10}$$

Weiters folgt aus dem Strahlensatz

$$\frac{AP}{EP} = \frac{AD}{FD}. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt

$$\frac{AP}{EP} = \frac{AD \cdot BC}{CD \cdot EB} = \frac{BC}{EC}. \tag{12}$$

Wegen $\sphericalangle PEC = \sphericalangle QBC$ sind die Winkel $\sphericalangle QCB$ und $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PCE$ genau dann gleich, wenn die Dreiecke PCE und QCB ähnlich sind. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{BQ}{BC} = \frac{EP}{EC}.$$

Nach (12) ist das genau dann der Fall, wenn $AP = BQ$. ■

Nach Konstruktion sind die Dreiecke APM und BQM kongruent, daher gilt

$$AP = BQ \tag{13}$$

und AP und BQ sind parallel.

Wir nehmen zunächst an, dass $ABDE$ ein Sehnenviereck ist. Aus dem Lemma folgt direkt $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$, vgl. Abbildung 5 (in der Abbildung ist zu Illustrationszwecken Q *nicht* die Spiegelung von P an M). Wir wählen B' auf der Geraden BC so, dass

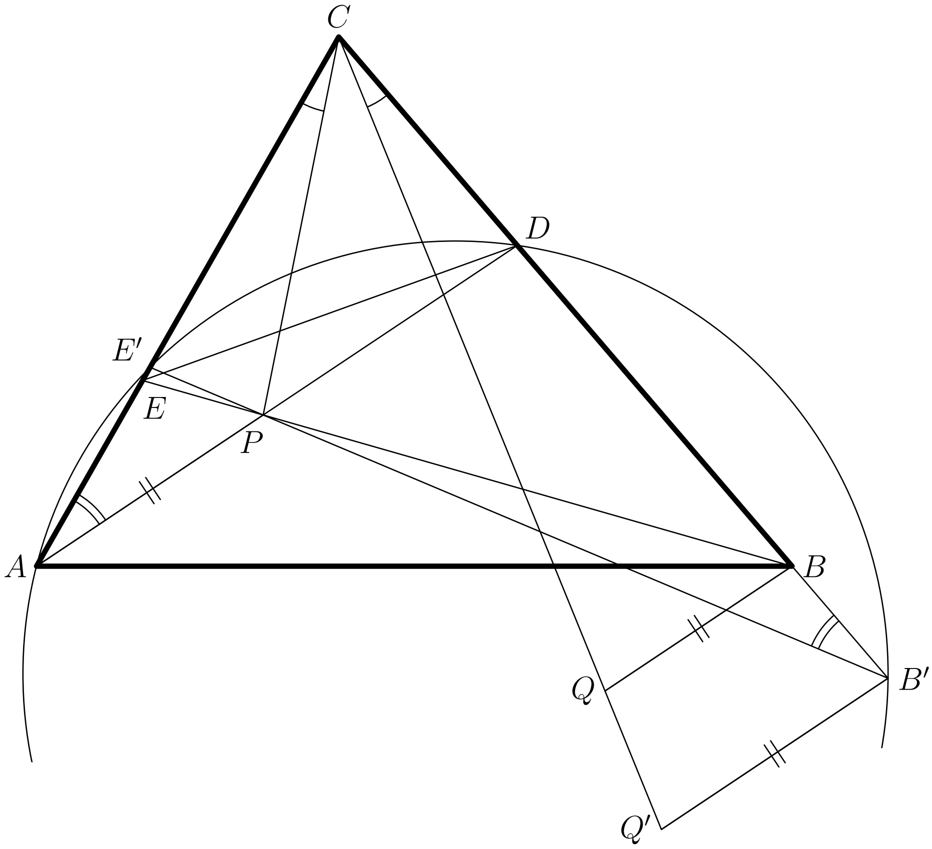

Abbildung 5: Aufgabe 2, Lösung 3, Umkehrung

$\sphericalangle CB'P = \sphericalangle PAC$. Weiters sei E' der Schnittpunkt der Geraden $B'P$ und AC. Da $\sphericalangle DAE' = \sphericalangle PAC = \sphericalangle CB'P = \sphericalangle DB'E'$, ist $AB'DE'$ ein Sehnenviereck. Wir wählen nun Q' auf der Geraden CQ so, dass $Q'B'$ parallel zu QB und daher zu AP ist.

Wir halten fest, dass $\sphericalangle PCA = \sphericalangle QCB = \sphericalangle Q'CB'$. Wir wenden nun das Lemma auf das Sehnenviereck $AB'DE'$ an und erhalten $Q'B' = PA = QB$. Nach dem Strahlensatz für die Dreiecke CQB und $CQ'B'$ folgt daraus sofort $Q = Q'$ und $B = B'$. Daraus folgt nach Definition von E bzw. E' auch $E = E'$, d.h., $ABDE$ ist ein Sehnenviereck.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 4. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei P auf der Strecke CM oder im Inneren des Dreiecks AMC. Andernfalls vertauscht man die Bezeichnung der Eckpunkte A und B und addiert bei beiden Winkeln der Angabe den Winkel $\sphericalangle PCQ$.

Sei C' die Spiegelung von C an M. Laut Angabe sind Q und B die Spiegelungen von P bzw. A an M. Weiters seien D' und E' die Schnittpunkte der Geraden $C'P$ bzw. CP mit den Seiten AC bzw. AC', vgl. Abbildung 6.

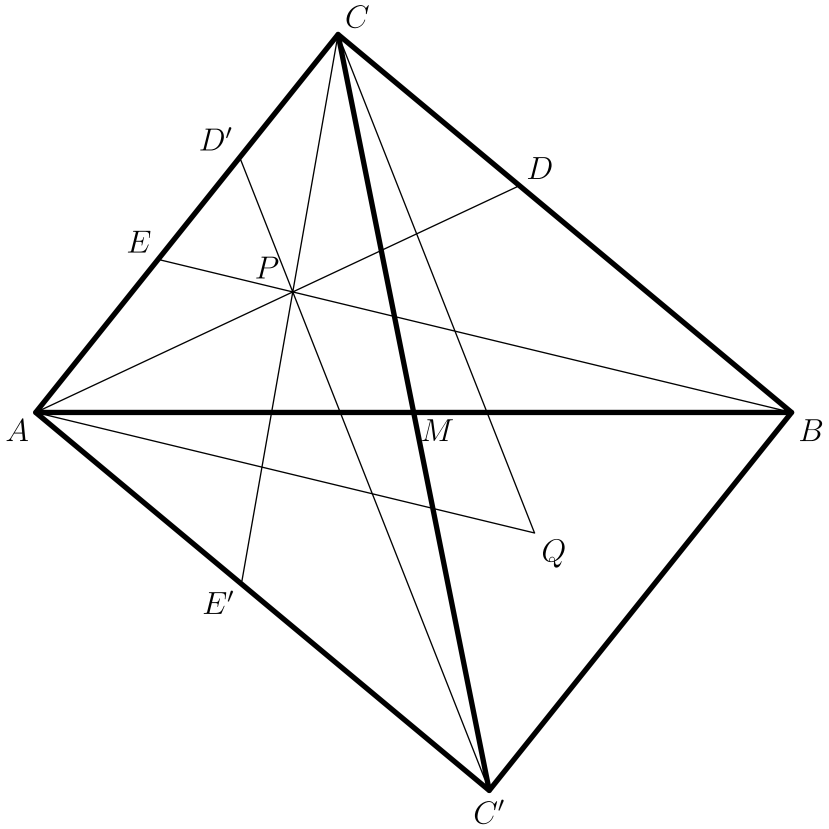

Abbildung 6: Aufgabe 2, Lösung 4, Äquivalenz-Lemma

Wir beweisen zuerst zwei Lemmas:

Lemma (Äquivalenz). Sei P nicht auf der Schwerlinie CM. Dann gelten folgende zwei Aussagen:

1. Die Winkel $\sphericalangle ACP$ und $\sphericalangle BCQ$ sind genau dann gleich, wenn $C'CD'E'$ ein Sehnenviereck ist.
2. Die Winkel $\sphericalangle CAP$ und $\sphericalangle C'AQ$ sind genau dann gleich, wenn $ABDE$ ein Sehnenviereck ist.

Beweis des Äquivalenz-Lemmas.

1. Wegen der Punktspiegelung an M ist $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle AC'P$. Damit gilt

$$\begin{aligned} & \sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ \\ \iff \quad & \sphericalangle ACP = \sphericalangle AC'P \\ \iff \quad & \sphericalangle D'CE' = \sphericalangle D'C'E' \\ \iff \quad & C'CD'E' \text{ ist ein Sehnenviereck} \end{aligned}$$

   laut Peripheriewinkelsatz über der Strecke $D'E'$.
2. Da wegen der Punktspiegelung $\sphericalangle C'AQ = \sphericalangle PBC$ ist, gilt die behauptete Äquivalenz gleich wie oben.

∎

Lemma (Erste Richtung). Sei XYZ ein Dreieck. Der Mittelpunkt der Seite XY heiße M.

Es sei P ein Punkt im Inneren des Dreiecks. Die Spiegelung von P an M ergebe den Punkt Q.

Weiters seien D und E die Schnittpunkte der Geraden XP und YP mit den Seiten YZ bzw. XZ.

Falls X, Y, D und E auf einem Kreis liegen, dann gilt $\sphericalangle XZP = \sphericalangle YZQ$.

Beweis des Lemmas über die erste Richtung. Die Punkte R und S auf XD bzw. YE seien so, dass $\sphericalangle YZR = \sphericalangle YZS = \sphericalangle XZP$ gilt. Seien Q' und Q'' auf der Geraden ZS so, dass $YQ' \parallel XD$ bzw. $XQ'' \parallel YE$ gilt, vgl. Abbildung 7 (damit Q' und Q'' in der Abbildung nicht zusammenfallen, ist $\sphericalangle YZR$ dort nicht exakt gleich $\sphericalangle XZP$).

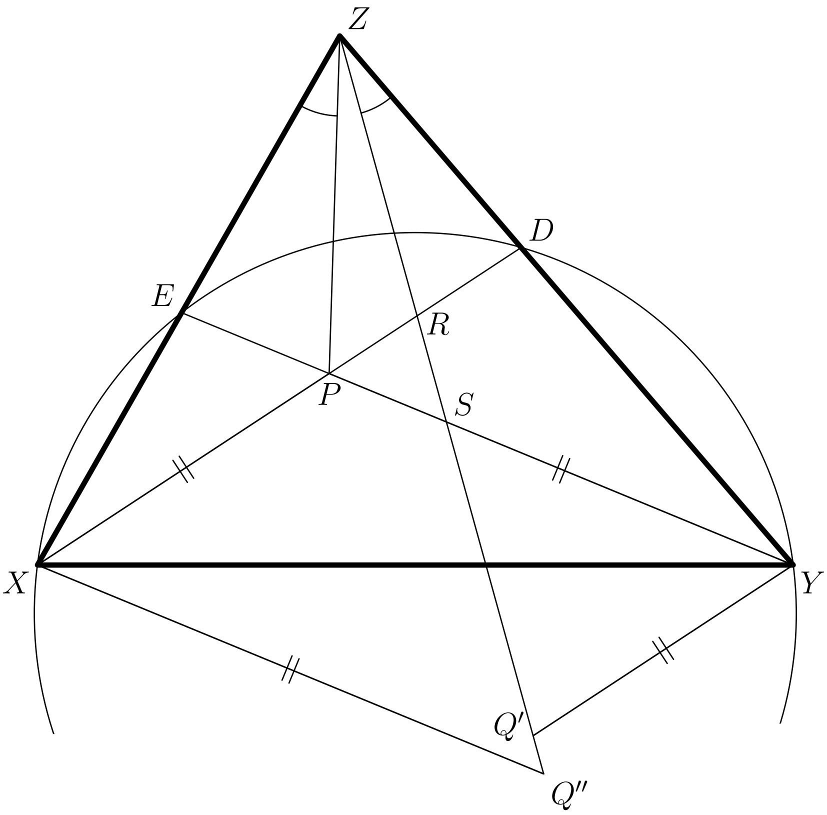

Abbildung 7: Aufgabe 2, Lösung 4, Lemma über die erste Richtung

Laut Peripheriewinkelsatz über der Sehne XY gilt $\sphericalangle XEY = \sphericalangle XDY$, und damit $\sphericalangle ZEY = \sphericalangle ZDX$. Da laut Konstruktion $\sphericalangle YZS = \sphericalangle XZP$, $YQ' \parallel XD$ und $XQ'' \parallel YE$ gilt, erhalten wir folgende ähnliche Dreiecke

$$\begin{aligned} &ZQ'Y \sim ZRD \sim ZPE, \\ &ZEY \sim ZDX, \\ &ZDP \sim ZES \sim ZXQ''. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$ZQ' = \frac{ZY \cdot ZP}{ZE} = \frac{ZX \cdot ZP}{ZD} = ZQ''$$

und daher $Q' = Q''$. Daher ist $XQ'YP$ ein Parallelogramm und M der Mittelpunkt von PQ'. Damit ist $Q' = Q$ laut Voraussetzung des Lemmas und somit auf Grund der Definition von S mittels $\sphericalangle YZS = \sphericalangle XZP$ auch $\sphericalangle YZQ = \sphericalangle XZP$. ■

Nun beweisen wir die Aussage der Angabe. Wenn wir das Lemma über die erste Richtung auf das Dreieck ABC anwenden, erhalten wir: Wenn $ABDE$ ein Sehnenviereck ist, folgt $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle ACP$.

Sei nun P nicht auf CM und $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ$. Dann folgt aus dem Äquivalenz-Lemma, dass $C'CD'E'$ ein Sehnenviereck ist. Das Lemma über die erste Richtung angewendet auf das Dreieck $CC'A$ impliziert $\sphericalangle C'AQ = \sphericalangle CAP$. Daher folgt aus dem Äquivalenz-Lemma, dass $ABDE$ auf einem Kreis liegen.

Falls P auf CM liegt und $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ$ ist, sind C, P, M und Q alles Punkte auf der Winkelsymmetrale. Damit ist ABC gleichschenklig und, da P auf der Symmetrieachse liegt, gilt $ED \parallel AB$. Damit ist $ABDE$ ein gleichschenkliges Trapez und hat daher einen Umkreis.

(Sara Kropf) □

Lösung 5. (Lösung für die Richtung „wenn $ABDE$ Sehnenviereck, dann $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$“.)

Sei $ABDE$ ein Sehnenviereck, vgl. Abbildung 8. Da BQ die Spiegelung von AP an M ist, ist $AQBP$

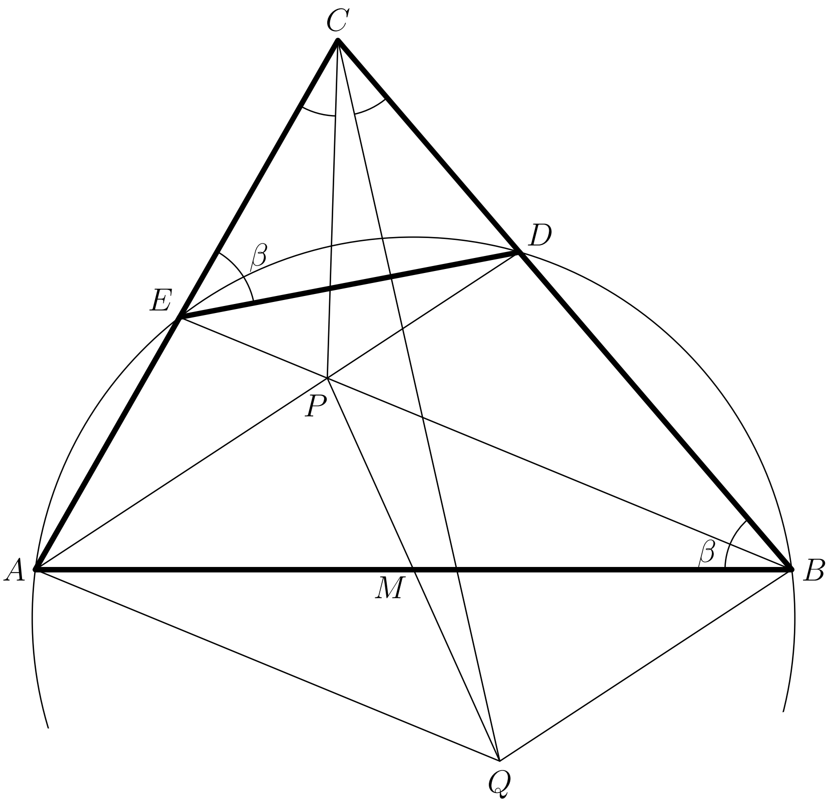

Abbildung 8: Aufgabe 2, Lösung 5, erste Richtung

ein Parallelogramm. Der Winkel $\sphericalangle CED$ ist der Supplementärwinkel zu $\sphericalangle AED$, der wiederum (wegen der Sehnenviereck-Eigenschaft) der Supplementärwinkel zu $\sphericalangle ABC$ ist, somit $\sphericalangle CED = \sphericalangle ABC$. Daher sind die Dreiecke CED und CBA ähnlich.

Wir betrachten nun die Ähnlichkeitstransformation (eine Spiegelung an der Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BCA$ und eine Streckung), die D in A abbildet. Da die Dreiecke CED und CBA ähnlich sind, muss bei dieser Transformation E in B übergehen. Da AQB kongruent zu BPA und dieses Dreieck ähnlich zu DPE ist, geht bei dieser gegensinnigen Ähnlichkeitstransformation das Dreieck DPE in das Dreieck AQB über, also P in Q. Daher gilt $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$.

(Levi Haunschmid) □

Lösung 5a. (Lösung für die Richtung „wenn $ABDE$ Sehnenviereck, dann $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$“.)

Wie in Lösung 5 sehen wir durch einfache „Winkeljagd“, dass einerseits die Dreiecke ECD und BCA ähnlich sind, und andererseits auch die Dreiecke DPE und AQB, vgl. Abbildung 8.

Somit sind auch die Vierecke $ECDP$ und $BCAQ$ ähnlich, und deshalb in weiterer Folge die Dreiecke ECP und BCQ. Damit ist alles bewiesen.

(Alexander Hein, Bruno Perreaux) □

Lösung 6. Da sich PQ und AB gegenseitig halbieren, ist $PAQB$ ein Parallelogramm. Die Translation, die den Punkt Q auf A und den Punkt B auf P abbildet, bildet den Punkt C auf einen Punkt ab, den wir H nennen, vgl. Abbildung 9. Es gilt dann auch $PH \parallel BC$ und $QC \parallel AH$ in den entstandenen Parallelogrammen $PBCH$ und $AQCH$.

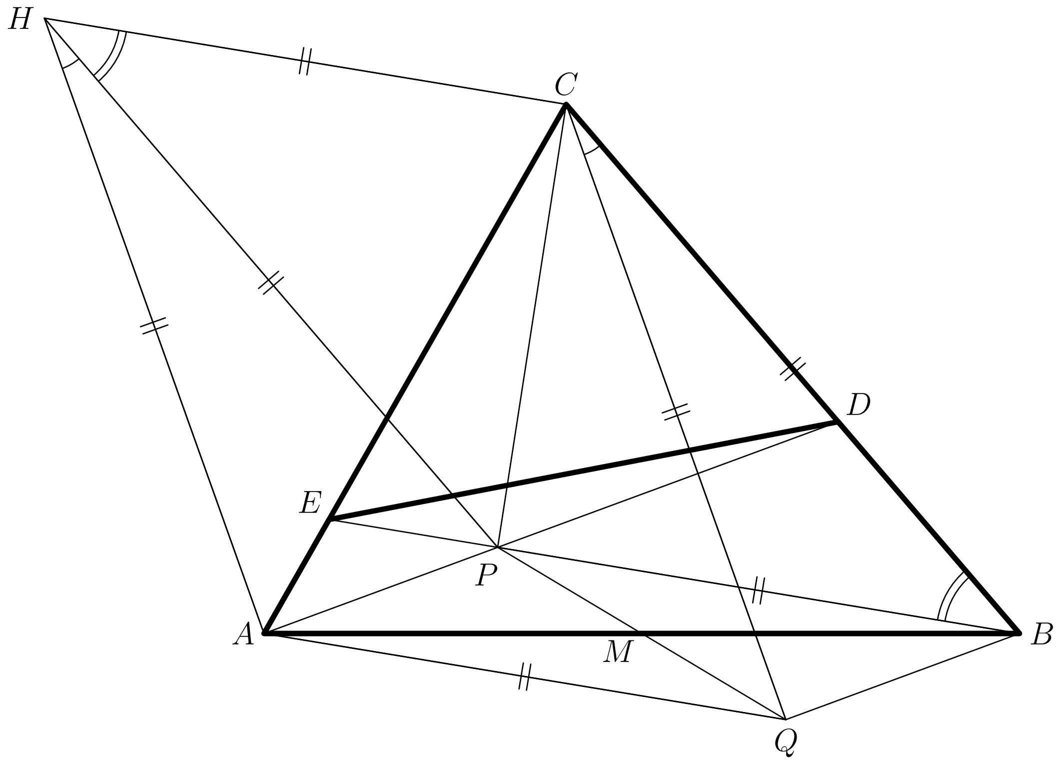

Abbildung 9: Aufgabe 2, Lösung 6

Es gelten die folgenden Äquivalenzen nach Peripheriewinkelsatz und Parallelwinkeln:

$$
\begin{aligned}
& ABDE \text{ ist ein Sehnenviereck} \\
\Longleftrightarrow\quad & \sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC \\
\Longleftrightarrow\quad & \sphericalangle PAC = \sphericalangle PHC \\
\Longleftrightarrow\quad & PACH \text{ ist ein Sehnenviereck} \\
\Longleftrightarrow\quad & \sphericalangle ACP = \sphericalangle AHP \\
\Longleftrightarrow\quad & \sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB.
\end{aligned}
$$

(Bodo Lass) □

Aufgabe 3. *Wir betrachten die folgende Operation, die aus einer gegebenen natürlichen Zahl eine neue Zahl entstehen lässt: Die gegebene Zahl wird in einer beliebigen ganzzahligen Basis $b \geq 2$ dargestellt, in der sie zweistellig mit beiden Ziffern ungleich 0 ist. Dann werden die beiden Ziffern vertauscht und das Ergebnis in der Zifferndarstellung zur Basis b ist die neue Zahl.*

Ist es möglich, mit eventuell mehreren dieser Operationen jede Zahl größer als zehn zu einer Zahl kleiner oder gleich zehn zu verändern?

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung 1. Wir zeigen, dass wir aus jeder Zahl > 10 eine kleinere Zahl erzeugen können. Damit werden wir irgendwann eine Zahl ≤ 10 erreichen.

Wenn die Zahl $n = 2k + 1$ ungerade ist, dann wählen wir als Basis für die Zifferndarstellung $b = k$. Es gilt also $n = (21)_k$. Damit erhalten wir als neue Zahl $(12)_k = k + 2$. Da $k \geq 5$ gelten muss, ist die Wahl von $b = k$ zulässig und es gilt $k + 2 \leq 2k - 5 + 2 < 2k + 1$ wie gewünscht.

Wenn die Zahl $n = 2k$ gerade ist, wählen wir als Basis $b = 2k - 2$ und erhalten $n = (12)_{2k-2}$. Die neue Zahl ist also $(21)_{2k-2} = 4k - 3$. Jetzt wählen wir als Basis $k - 1$ und erhalten $4k - 3 = (41)_{k-1}$. Die neue Zahl ist also $(14)_{k-1} = k + 3$. Wegen $k > 5$ sind beide Basen größer als die größte vorkommende Ziffer und somit zulässig und es gilt $k + 3 < 2k$ wie gewünscht.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. 1. Wir betrachten zunächst einige Spezialfälle.

(a) $12 = (12)_{10} \mapsto (21)_{10} = 21 = (41)_5 \mapsto (14)_5 = 9$.

(b) $18 = (12)_{16} \mapsto (21)_{16} = 33 = (41)_8 \mapsto (14)_8 = 12$, weiter wie oben.

(c) $24 = (24)_{10} \mapsto (42)_{10} = 42 = (52)_8 \mapsto (25)_8 = 21 = (21)_{10} \mapsto (12)_{10} = 12$, weiter wie oben.

2. Sei nun $n > 10$ die kleinste ganze Zahl, die nicht durch Anwendung einer oder mehrerer der angegebenen Operationen in eine ganze Zahl ≤ 10 transformiert werden kann.

Lemma. Sei $k \geq 2$ mit $k(k+1) \leq n$. Dann gilt $k \mid n$.

Beweis. Wir nehmen indirekt an, dass $k \nmid n$.

Durch Division mit Rest erhalten wir $n = kq + r$ für gewisse ganze Zahlen q und r mit $1 \leq r < k$. Da $n > 0$, ist der Quotient q sicherlich nicht-negativ. Außerdem gilt

$$k(k+1) \leq n = kq + r < kq + k = k(q+1),$$

woraus $k < q$ folgt. Daher erhalten wir $1 \leq r < k < q$. Somit ist $(kr)_q$ die Entwicklung von n zur Basis q.

Wir können nun $n = (kr)_q$ in einem Schritt zu $(rk)_q$ transformieren, welches kleiner ist. Nach Annahme kann daher n in endlich vielen Schritten in eine ganze Zahl ≤ 10 transformiert werden, Widerspruch. ∎

3. Sei nun m die größte ganze Zahl mit $m(m+1) \leq n$. Aus dem Lemma folgt $\operatorname{kgV}(2, 3, \ldots, m) \mid n$.

4. Wir betrachten nun verschiedene Intervalle für n und nutzen obige Beobachtung, um alle möglichen Werte von n innerhalb dieser Intervalle herauszufinden.

Intervall	m	Bedingung	Mögliche Werte von n
$11 \leq n < 12$	2	$2 \mid n$	—
$12 \leq n < 20$	3	$6 \mid n$	$n \in \{12, 18\}$
$20 \leq n < 30$	4	$12 \mid n$	$n = 24$
$30 \leq n < 42$	5	$60 \mid n$	—.

Für die Zahlen 12, 18 und 24 haben wir aber bereits in den Spezialfällen zu Beginn gezeigt, dass sie in Zahlen ≤ 10 verwandelt werden können und somit nicht als Werte für n in Betracht kommen.

Daher ist $n \geq 42$ und somit $m \geq 6$.

5. Da $m \mid n$ und $m(m+1) \leq n < (m+1)(m+2)$, können wir $n = m(m+1) + tm$ für eine ganze Zahl $t \geq 0$ schreiben. Die Bedingung $n < (m+1)(m+2)$ ist zu

$$m^2 + m + tm \leq m^2 + 3m + 1 \iff t \leq 2 + \frac{1}{m} < 3$$

äquivalent. Daher gilt $t \in \{0, 1, 2\}$.

Da $(m-1) \mid n$, gilt

$$0 \equiv n = m(m+1) + tm \equiv 2 + t \pmod{m-1},$$

und somit $(m-1) \mid (t+2) \in \{2, 3, 4\}$. Daher gilt $m - 1 \leq 4$, also $m \leq 5$, ein Widerspruch.

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 4. *Es seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $x + y + z \geq 3$. Man beweise:*

$$\frac{1}{x+y+z^2} + \frac{1}{y+z+x^2} + \frac{1}{z+x+y^2} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Karl Czakler)

Lösung 1. Aus der Cauchyschen Ungleichung folgt

$$(x+y+z^2)(x+y+1) \geq (x+y+z)^2, \tag{14}$$

also

$$\frac{1}{x+y+z^2} \leq \frac{x+y+1}{(x+y+z)^2}.$$

Daher genügt es zu zeigen, dass

$$\sum_{cyc} \frac{x+y+1}{(x+y+z)^2} = \frac{2(x+y+z)+3}{(x+y+z)^2} \leq 1.$$

Diese Ungleichung ist aber äquivalent zur Ungleichung

$$(x+y+z)^2 - 2(x+y+z) - 3 \geq 0.$$

Diese ist für alle $x+y+z \geq 3$ erfüllt.

Gleichheit gilt in (14), wenn (x, y, z^2) und $(x, y, 1)$ kollinear sind, also wenn $z^2 = 1$, d.h. $z = 1$. Aus den zyklischen Vertauschungen von (14) ergibt sich im Gleichheitsfall auch $x = y = 1$. Tatsächlich gilt für $x = y = z = 1$ Gleichheit in der ursprünglichen Ungleichung.

(Karl Czakler) □

Lösung 1a. Wir beweisen folgende Verallgemeinerung.

Lemma. Es seien $n \geq 2$ eine ganze Zahl und t eine positive reelle Zahl. Dann gilt für alle positiv-reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ die Ungleichung

$$\frac{1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + t \cdot x_n^2} + \frac{1}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n + t \cdot x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_n + x_1 + \cdots + x_{n-2} + t \cdot x_{n-1}^2} \leq 1 + \frac{(1-t)}{t \cdot n}. \tag{15}$$

Beweis. Wir bezeichnen die linke Seite von (15) mit L. Mit Hilfe von Cauchy-Schwarz ergibt sich

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n)^2 \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + t \cdot x_n^2) \cdot \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{1}{t}\right).$$

Also haben wir mit $s := x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n$, dass

$$\frac{1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + t \cdot x_n^2} \leq \frac{s - x_n + \frac{1}{t}}{s^2}.$$

Analoge Abschätzungen gelten für die anderen $n-1$ Summanden auf der linken Seite der in Rede stehenden Ungleichung. Folglich haben wir $L \leq \frac{n \cdot s - s + \frac{n}{t}}{s^2}$, d.h.

$$L \leq \frac{n-1}{s} + \frac{n}{t \cdot s^2}. \tag{16}$$

Wegen $s \geq n$ ergibt sich deshalb unmittelbar $L \leq \frac{n-1}{n} + \frac{n}{t \cdot n^2}$, also $L \leq 1 + \frac{(1-t)}{t \cdot n}$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn

- in der letzten Abschätzung $s = n$ ist
- und in den Cauchy-Schwarz-Abschätzungen der Reihe nach $t \cdot x_j^2 = \frac{1}{t}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sind.

Alles in allem: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{t}$. Dies, $s = n$ und $s = n \cdot \frac{1}{t}$ zeigen, dass nur der Fall $t = 1$ Gleichheit gestattet. ■

Man könnte allerdings die etwas künstliche Bedingung $s \geq n$ weglassen und dann alles mutatis mutandis mittels (16) adaptieren.

Dann hätte man (vielleicht am „übersichtlichsten“):

Es seien $n \geq 2$ eine ganze Zahl und t eine positive reelle Zahl. Dann gilt für alle positiv-reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (wenn wir $s := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ setzen)

$$\frac{1}{s + t \cdot x_1^2 - x_1} + \frac{1}{s + t \cdot x_2^2 - x_2} + \cdots + \frac{1}{s + t \cdot x_n^2 - x_n} \leq \frac{n-1}{s} + \frac{n}{t \cdot s^2}.$$

Gleichheit ergibt sich genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{t}$.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wenn $x + y + z > 3$, können wir x, y und z zu $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ verringern, sodass $\tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} = 3$ und die linke Seite der Ungleichung größer wird. Somit können wir sowohl für den Beweis der Ungleichung als auch für die Bestimmung des Gleichheitsfalles ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x + y + z = 3$ und $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Es reicht also in diesem Fall zu zeigen:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{3 - x + x^2} \leq 1.$$

Es gilt offensichtlich Gleichheit für $x = y = z = 1$. Wir verwenden daher die Methode der Supporting Line, indem wir die Tangente an der Stelle $x = 1$ an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{3-x+x^2}$ legen und zeigen, dass der Graph unterhalb der Tangente liegt.

Wir wollen also für $0 \leq x \leq 3$ beweisen, dass

$$\frac{1}{3 - x + x^2} \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x - 1). \tag{17}$$

Dies ist nach Multiplikation mit den Nennern und Faktorisierung äquivalent zu

$$(x - 1)^2(3 - x) \geq 0. \tag{18}$$

Das ist offensichtlich richtig und wir können die Ungleichung (17) nun für die Variablen x, y und z aufsummieren und erhalten

$$\sum_{cyc} \frac{1}{3 + x - x^2} \leq 1 - \frac{1}{9}(x + y + z - 3) = 1$$

wie gewünscht.

In der Abschätzung (18) gilt Gleichheit genau für $x = 1$ und $x = 3$. Im Gleichheitsfall müssen also alle Variablen die Werte 1 oder 3 annehmen und Summe gleich 3 haben. Daher ist $x = y = z = 1$ wirklich der einzige Gleichheitsfall.

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 2a. Wenn $x + y + z > 3$, können wir x, y und z zu $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ verringern, sodass $\tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} = 3$ und die linke Seite der Ungleichung größer wird.

Daher reicht es aus, die Ungleichung für den Fall $x + y + z = 3$ zu beweisen.

Wir schreiben die linke Seite zu

$$\sum_{cyc} \frac{1}{3 - z + z^2} = \sum_{cyc} \frac{4}{(2z - 1)^2 + 11}$$

um.

Die Abbildung $u \mapsto \frac{1}{u^2+11}$ hat zweite Ableitung

$$u \mapsto \frac{2(3u^2-11)}{(u^2+11)^3},$$

weshalb diese Funktion für $u^2 < 11/3$ konkav ist.

Wenn mindestens eine der drei Zahlen $(2x-1)^2$, $(2y-1)^2$, $(2z-1)^2$ größer oder gleich als $11/3$ ist, so gilt

$$\sum_{cyc} \frac{4}{(2z-1)^2+11} \le \frac{4}{11} + \frac{4}{11} + \frac{4}{\frac{11}{3}+11} = 1.$$

Hier gilt Gleichheit genau dann, wenn (bis auf eine Permutation) $x = 1/2$, $y = 1/2$ und $z = (1+\sqrt{11/3})/2$ gelten, was ein Widerspruch zu $x+y+z=3$ ist.

Daher müssen wir lediglich den Fall $(2x-1)^2 < 11/3$, $(2y-1)^2 < 11/3$, $(2z-1)^2 < 11/3$ betrachten. Aus der Jensen-Ungleichung folgt

$$\frac{1}{3}\sum_{cyc} \frac{1}{(2z-1)^2+11} \le \frac{1}{(\frac{1}{3}\sum_{cyc}(2z-1))^2+11} = \frac{1}{12}.$$

Das Resultat folgt durch Multiplikation mit 12.

Gleichheit in der Jensen-Ungleichung gilt genau dann, wenn $2x-1 = 2y-1 = 2z-1$, d.h., $x = y = z = 1$. Tatsächlich gilt für $x = y = z = 1$ Gleichheit in der ursprünglichen Ungleichung.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2b. Wenn $x+y+z > 3$, können wir x, y und z zu $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ verringern, sodass $\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z} = 3$ und die linke Seite der Ungleichung größer wird.

Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x+y+z=3$ und $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Wir formen die zu zeigende Ungleichung zu

$$\frac{1}{3-x+x^2} + \frac{1}{3-y+y^2} + \frac{1}{3-z+z^2} \le 1$$

um. Durch quadratisches Ergänzen und die Substitution $x - \frac{1}{2} = a$, $y - \frac{1}{2} = b$ und $z - \frac{1}{2} = c$ ist die Ungleichung äquivalent zu

$$f(a,b,c) := \frac{1}{a^2+\frac{11}{4}} + \frac{1}{b^2+\frac{11}{4}} + \frac{1}{c^2+\frac{11}{4}} \le 1.$$

Offensichtlich müssen $-\frac{1}{2} \le a \le \frac{5}{2}$, $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{5}{2}$ und $-\frac{1}{2} \le z \le \frac{5}{2}$ sowie $a+b+c = \frac{3}{2}$ gelten. Die Menge solcher (a,b,c) ist beschränkt und abgeschlossen und $f(a,b,c)$ ist dort stetig. Somit gibt es solche (a,b,c), für die die Summe auf der linken Seite ihr Maximum annimmt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a \le b \le c$.

Wenn $c^2 \ge \frac{11}{12}$, so folgt

$$f(a,b,c) \le f\Big(0,0,\sqrt{\frac{11}{12}}\Big) = \frac{4}{11} + \frac{4}{11} + \frac{3}{11} = 1.$$

Somit können wir annehmen, dass $c^2 < \frac{11}{12}$.

Nun nehmen wir an, dass $a < c$. Wir schreiben $a = m-t$, $c = m+t$ für passende reelle Zahlen t und m mit $t > 0$. Da $a+b+c = 3/2$, gilt $c \ge 1/2$. Zusammen mit $a \ge -1/2$ ergibt sich $m = (a+c)/2 \ge 0$. Wir behaupten nun, dass

$$f(a,b,c) < f(m,b,m), \tag{19}$$

was einen Widerspruch zur Maximalität von $f(a,b,c)$ darstellt, weil $a < m$ und $a+b+c = 2m+b$ und damit (m,b,m) ebenfalls ein zulässiges Argumenttupel ist.

Die Ungleichung (19) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&& \frac{1}{(m-t)^2+\frac{11}{4}} + \frac{1}{(m+t)^2+\frac{11}{4}} &< \frac{2}{m^2+\frac{11}{4}} \\
\Longleftrightarrow && \Big((m+t)^2+(m-t)^2+\frac{11}{2}\Big)\Big(m^2+\frac{11}{4}\Big) &< 2\Big((m+t)^2+\frac{11}{4}\Big)\Big((m-t)^2+\frac{11}{4}\Big) \\
\Longleftrightarrow && \Big(m^2+t^2+\frac{11}{4}\Big)\Big(m^2+\frac{11}{4}\Big) &< \Big((m+t)^2+\frac{11}{4}\Big)\Big((m-t)^2+\frac{11}{4}\Big) \\
\Longleftrightarrow && m^4+m^2t^2+\frac{11}{4}(2m^2+t^2)+\frac{11^2}{4^2} &< (m^2-t^2)^2+\frac{11}{2}(m^2+t^2)+\frac{11^2}{4^2} \\
\Longleftrightarrow && 3m^2t^2 &< t^4+\frac{11}{4}t^2 \\
\Longleftrightarrow && m^2 &< \frac{11}{12}+\frac{t^2}{3}.
\end{aligned}$$

Da aber $m^2 \le c^2 < 11/12$, ist das jedenfalls eine wahre Aussage, womit (19) bewiesen ist.

Damit muss $a = b = c = \frac{1}{2}$ gelten. Daraus folgt aber

$$f(a,b,c) \le f\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1.$$

Aus (19) folgt auch sofort, dass Gleichheit höchstens für $a = b = c = \frac{1}{2}$, also $x = y = z = 1$ gilt. Für diese (x,y,z) gilt auch offensichtlich in der gegebenen Ungleichung Gleichheit.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2c. Wenn $x+y+z > 3$, können wir x, y und z zu $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ verringern, sodass $\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z} = 3$ und die linke Seite der Ungleichung größer wird.

Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x+y+z = 3$ und $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Wir haben dann die Ungleichung

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^2+3-x} \le 1$$

zu beweisen.

Wir verwenden das „RCF-Theorem“ (vgl. MEMO-Skriptum):

> *Lemma* (RCF-Theorem). Sei $g\colon I \to \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$. Weiters sei g konvex in $I \cap [m,\infty)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
>
> 1. Für alle x, y, $z \in I$ mit $\frac{x+y+z}{3} = m$ gilt
>
> $$\frac{g(x)+g(y)+g(z)}{3} \ge g(m).$$
>
> 2. Für alle x, $y \in I$ mit $x \le m \le y$ und $\frac{x+2y}{3} = m$ gilt
>
> $$\frac{g(x)+2g(y)}{3} \ge g(m).$$

Wendet man das RCF-Theorem auf $h(u) = -g(-u)$ und $-m$ statt m an, so erhält man die folgende Formulierung für links konkave Funktionen.

Lemma. Sei $h\colon I \to \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$. Weiters sei h konkav in $I \cap (-\infty, m]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Für alle x, y, $z \in I$ mit $\frac{x+y+z}{3} = m$ gilt
$$\frac{h(x)+h(y)+h(z)}{3} \le h(m).$$

2. Für alle x, $y \in I$ mit $y \le m \le x$ und $\frac{x+2y}{3} = m$ gilt
$$\frac{h(x)+2h(y)}{3} \le h(m).$$

Wir wenden dies nun auf $h(u) = 1/(u^2+3-u)$, das Intervall $I = [0,3]$ und $m = 1$ an. Wir differenzieren zweimal und erhalten

$$\begin{aligned} h'(u) &= \frac{1-2u}{(u^2+3-u)^2}, \\ h''(u) &= \frac{-4-6u+6u^2}{(u^2+3-u)^3}. \end{aligned}$$

Der Nenner von $h''(u)$ ist für alle reellen Zahlen u positiv; der Zähler ist als nach oben offene Parabel auf dem Intervall $[0,1]$ negativ, weil er für $u=0$ und $u=1$ negativ ist. Daher ist h wie gefordert auf $[0,1]$ konkav.

Wir nehmen nun an, dass $0 \le y \le 1 \le x$ mit $\frac{x+2y}{3} = 1$ gilt, also $x = 3-2y$. Zu zeigen bleibt, dass

$$\frac{h(x)+2h(y)}{3} \le h(1) \tag{20}$$

gilt, dann folgt die gegebene Ungleichung aus der Umformulierung des RCF-Theorems.

Die Ungleichung (20) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & & \frac{1}{(3-2y)^2+3-(3-2y)} + \frac{2}{y^2+3-y} &\le 1 \\ &\iff & \frac{1}{9-10y+4y^2} + \frac{2}{y^2+3-y} &\le 1 \\ &\iff & (y^2-y+3)+2(4y^2-10y+9) &\le (y^2-y+3)(4y^2-10y+9) \\ &\iff & 9y^2-21y+21 &\le 4y^4-14y^3+31y^2-39y+27 \\ &\iff & 0 &\le 4y^4-14y^3+22y^2-18y+6 \\ &\iff & 0 &\le (y-1)(4y^3-10y^2+12y-6) \\ &\iff & 0 &\le (y-1)^2(4y^2-6y+6) \\ &\iff & 0 &\le 2(y-1)^2(2y^2-3y+3). \end{aligned}$$

Der letzte quadratische Faktor hat Diskriminante $9-24=-15<0$ und ist daher stets positiv. Damit ist (20) und in der Folge auch die ursprüngliche Ungleichung gezeigt.

(Clemens Heuberger, Gerhard Kirchner) □

Lösung 3. Wenn $x+y+z>3$, können wir x, y und z zu $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ verringern, sodass $\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}=3$ und die linke Seite der Ungleichung größer wird.

Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x+y+z=3$ und $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Homogenisieren und Ausmultiplizieren der Gleichung ergibt (mit symmetrischer Summennotation) die äquivalente Ungleichung

$$\sum_{sym} x^6 + 2\sum_{sym} x^5y + 8\sum_{sym} x^4y^2 + 8\sum_{sym} x^3y^3 + 3\sum_{sym} x^2y^2z^2 \ge 3\sum_{sym} x^4yz + 19\sum_{sym} x^3y^2z. \tag{21}$$

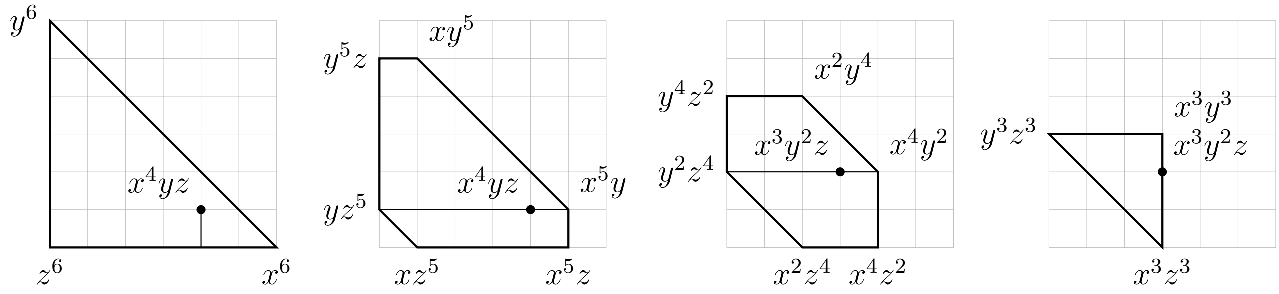

Abbildung 10: Exponentenvektoren zu Aufgabe 4 im Grundriss

Nach der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gilt

$$x^4y^2 + x^2y^2z^2 \geq 2x^3y^2z. \tag{22}$$

Verschärfen wir (21) durch dreifache Anwendung der symmetrischen Summe von (22), so bleibt noch die Ungleichung

$$\sum_{sym} x^6 + 2\sum_{sym} x^5y + 5\sum_{sym} x^4y^2 + 8\sum_{sym} x^3y^3 \geq 3\sum_{sym} x^4yz + 13\sum_{sym} x^3y^2z \tag{23}$$

zu zeigen. Da $[6,0,0]$ und $[5,1,0]$ jeweils $[4,1,1]$ dominieren sowie $[4,2,0]$ und $[3,3,0]$ jeweils $[3,2,1]$ dominieren, folgt nun (23) aus der Muirhead-Ungleichung.

Möchten wir die Muirhead-Ungleichung vermeiden, so verwenden wir (motiviert durch die Skizzen in Abbildung 10, in denen jeweils die Exponentenvektoren im Grundriss dargestellt werden und die Konvexkombination der Exponenten der rechten Seite durch die Exponenten der linken Seite abgelesen werden) jeweils die arithmetisch-geometrische Mittelungleichung und erhalten

$$\frac{4}{6}x^6 + \frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{6}z^6 \geq x^4yz, \tag{24}$$

$$\frac{4}{5}x^5y + \frac{1}{5}yz^5 \geq x^4yz, \tag{25}$$

$$\frac{3}{4}x^4y^2 + \frac{1}{4}y^2z^4 \geq x^3y^2z, \tag{26}$$

$$\frac{2}{3}x^3y^3 + \frac{1}{3}x^3z^3 \geq x^3y^2z. \tag{27}$$

Addiert man einmal, zweimal, 5 mal bzw. 8 mal die symmetrischen Summen von (24), (25), (26) bzw. (27), so erhält man genau (23).

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 5. *Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und k ein Kreis durch A und B. Dieser Kreis schneide*

- *die Gerade AI in den Punkten A und P,*
- *die Gerade BI in den Punkten B und Q,*
- *die Gerade AC in den Punkten A und R sowie*
- *die Gerade BC in den Punkten B und S,*

wobei die Punkte A, B, P, Q, R und S paarweise verschieden sind und R bzw. S im Inneren der Strecken AC bzw. BC liegen.

Man zeige, dass die Geraden PS, QR und CI einander in einem Punkt schneiden.

(Stephan Wagner)

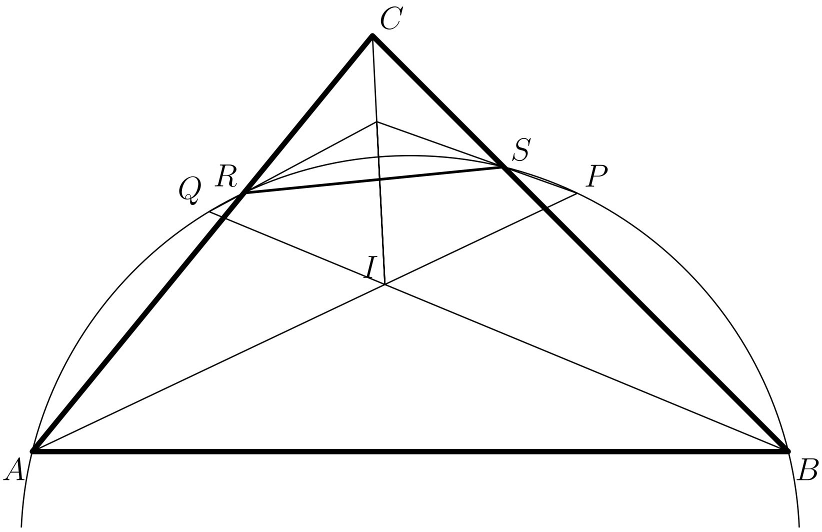

Abbildung 11: Aufgabe 5, Lösung 1

Lösung 1. Siehe Abbildung 11. Wir verwenden orientierte Winkel. Nach dem Peripheriewinkelsatz sind die Winkel $\sphericalangle RSP$ und $\sphericalangle RAP$ modulo 180° gleich. Außerdem gilt $\sphericalangle RSC = \sphericalangle RAB$, weil $\sphericalangle RSC$ der Gegenwinkel des Supplementärwinkels von $\sphericalangle RAB$ ist. Daher ist PS eine Innenwinkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle RSC$.

Analog dazu ist auch QR die Innenwinkelsymmetrale von $\sphericalangle SRC$.

Daher müssen die Geraden PS, QR und CI einander in einem Punkt schneiden, nämlich dem Inkreismittelpunkt von CRS.

(Stephan Wagner) □

Lösung 2. Wir setzen $\alpha = \sphericalangle BAC$ und $\beta = \sphericalangle CBA$ wie üblich, vergleiche Abbildung 12. Da $ABSR$ ein

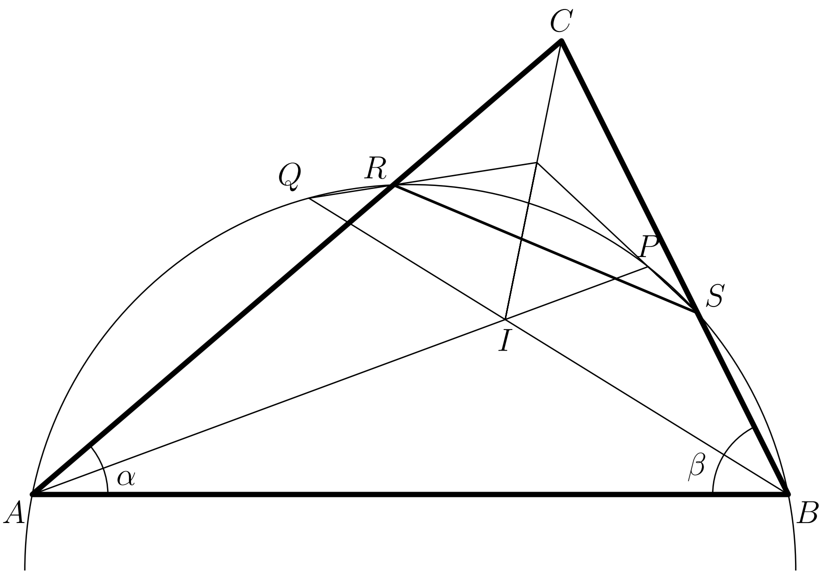

Abbildung 12: Aufgabe 5, Lösung 2

Sehnenviereck ist, gilt $\sphericalangle BSR = 180° - \alpha$ und daher $\sphericalangle RSC = \alpha$. Analog gilt $\sphericalangle CRS = \beta$.

Wenn P im Inneren des Dreiecks ABC liegt, so gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle RSP = \sphericalangle RAP = \alpha/2$. Daher ist PS die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle CSR$.

Wenn Q im Äußeren des Dreiecks ABC liegt, so ist nach dem Peripheriewinkelsatz $\sphericalangle QRA = \sphericalangle QBA = \beta/2$, somit ist auch QR die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle SRC$.

Unabhängig von der Lage von Q und R sind somit QR, PS sowie CI die Innenwinkelsymmetralen im Dreieck CRS und schneiden sich somit in einem Punkt.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2a. Im Gegensatz zu Lösung 2 nehmen wir nicht an, dass I der Inkreismittelpunkt ist, vgl. Abbildung 13. Wie in Lösung 2 erhalten wir $\sphericalangle RSC = \alpha$, $\sphericalangle CRS = \beta$, $\sphericalangle RSP = \sphericalangle RAP = \sphericalangle CAI = \varphi$

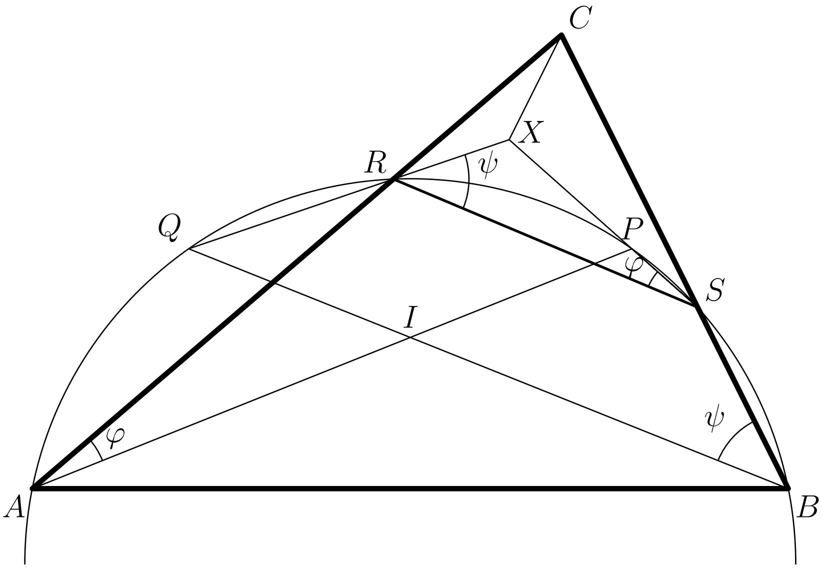

Abbildung 13: Aufgabe 5, Lösung 2a

sowie $\sphericalangle QRA = \sphericalangle QBA = \sphericalangle IBA$.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von PS und QR mit X. Aus obigen Überlegungen folgt, dass $\sphericalangle XRS = \sphericalangle CRS - \sphericalangle CRX = \beta - \sphericalangle ARQ = \sphericalangle CBI = \psi$. Weiters gilt $\sphericalangle XSR = \sphericalangle CAI = \varphi$.

Damit ist X das Bild des zu I isogonal konjugierten Punktes bezüglich des Dreiecks ABC unter der Ähnlichkeitsabbildung, die das Dreieck ABC auf das Dreieck SRC abbildet. Daher gilt $\sphericalangle XCS = \sphericalangle ICB$ und damit liegt X auf der Geraden CI, wie zu zeigen war.

(Clemens Heuberger, Sara Kropf, Stephan Wagner) □

Lösung 3. Sei X der Schnittpunkt der Geraden PS und QR. Es ist zu zeigen, dass X auf der Geraden CI liegt.

Wir betrachten das Sehnensechseck $APSBQR$, vgl. Abbildung 14. Nach dem Satz von Pascal liegen I als Schnittpunkt der Gegenseiten AP und BQ, X als Schnittpunkt der Gegenseiten PS und QR sowie C als Schnittpunkt der Gegenseiten RA und SB auf einer Geraden.

Diese Lösung bleibt unverändert gültig, wenn die Voraussetzung, dass I der Inkreismittelpunkt ist, weggelassen wird.

(Theresia Eisenkölbl, Sara Kropf) □

Lösung 4. Wie üblich bezeichnen wir $\alpha := \sphericalangle BAC$, vgl. Abbildung 15. Wir betrachten die Potenz des Punktes C bezüglich des Kreises und erhalten $CS \cdot CB = CR \cdot CA$ oder äquivalent

$$\frac{CS}{CR} = \frac{CA}{CB}.$$

Daher sind die Dreiecke CAB und CSR ähnlich.

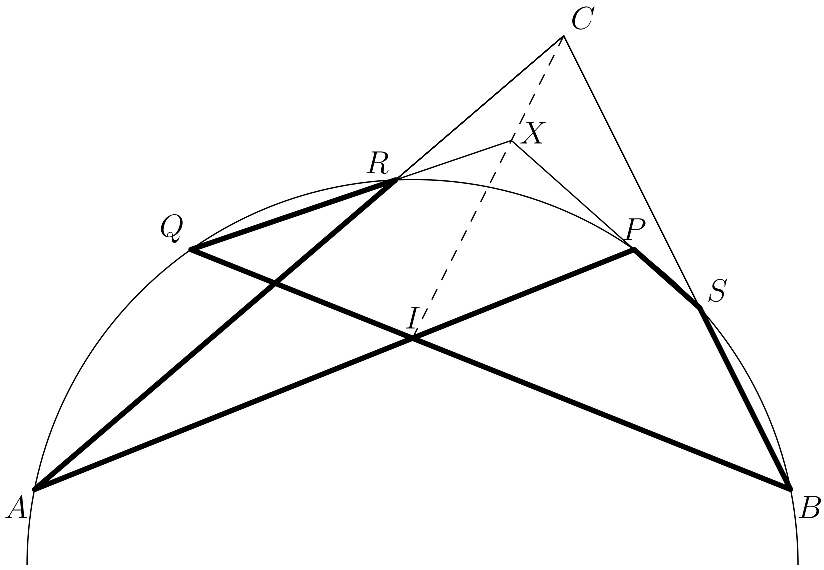

Abbildung 14: Aufgabe 5, Lösung 3

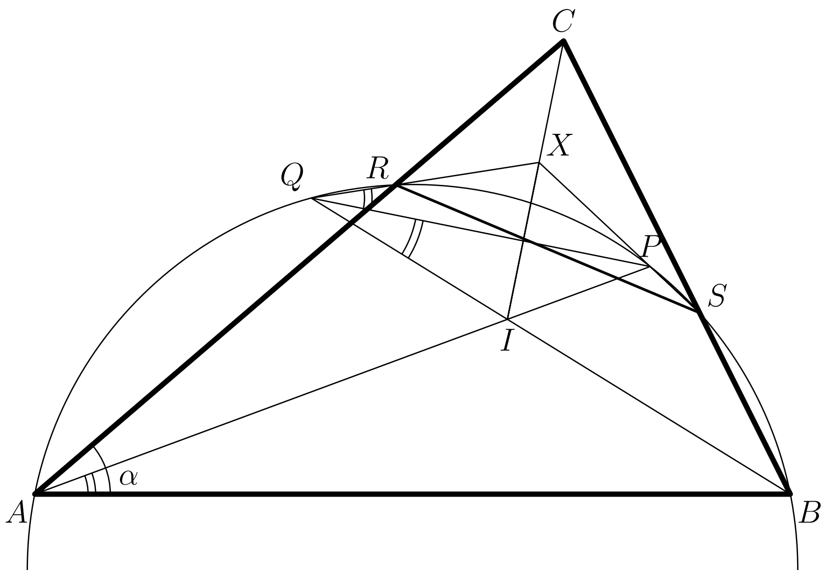

Abbildung 15: Aufgabe 5, Lösung 4

Wir bezeichnen nun den Schnittpunkt der Geraden PS und QR mit X. Wir betrachten nun die Potenz des Punktes X bezüglich des Kreises und erhalten $XS \cdot XP = XR \cdot XQ$ oder äquivalent

$$\frac{XS}{XR} = \frac{XQ}{XP}.$$

Damit sind die Dreiecke XRS und XPQ ähnlich. Da $\sphericalangle BQX = \sphericalangle BQR = \sphericalangle BAR = \alpha$ und $\sphericalangle BQP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\alpha$, ist $\sphericalangle XSQ = \sphericalangle XQB - \sphericalangle PQB = \alpha - \alpha/2 = \alpha/2$. Da die Dreiecke XRS und XPQ ähnlich sind, folgt $XRS = \alpha/2$ und XR ist die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle CRS$.

Analog ist XS die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle RSC$.

Daher ist X der Inkreismittelpunkt des Dreiecks CSR und liegt somit auf der Winkelsymmetralen CI von $\sphericalangle SCR$.

(Diese Lösung hängt *nicht* von der Reihenfolge von P und S bzw. Q und R am Kreis ab.)

(Simon Wegan) □

Aufgabe 6. *Max hat* 2015 *Dosen, die von* 1 *bis* 2015 *nummeriert sind, sowie einen unbeschränkten Vorrat an Münzen.*

Man betrachte folgende Startkonfigurationen:

(a) *Alle Dosen sind leer.*

(b) *In der Dose Nummer* 1 *befindet sich* 1 *Münze, in der Dose Nummer* 2 *sind* 2 *Münzen, und so weiter, bis zur Dose Nummer* 2015*, in der sich* 2015 *Münzen befinden.*

(c) *In der Dose Nummer* 1 *befinden sich* 2015 *Münzen, in der Dose Nummer* 2 *sind* 2014 *Münzen, und so weiter, bis zur Dose Nummer* 2015*, in der sich* 1 *Münze befindet.*

Nun wählt Max in jedem Schritt eine Zahl n mit $1 \leq n \leq 2015$ aus, und fügt zu jeder Dose außer zur Dose Nummer n jeweils n Münzen hinzu.

Man bestimme für jede der drei Startkonfigurationen (a), (b) bzw. (c), ob Max erreichen kann, dass sich nach endlich vielen Schritten in jeder Dose gleich viele Münzen befinden und mindestens ein Schritt ausgeführt wurde.

(Birgit Vera Schmidt)

Lösung 1. Max kann in allen drei Fällen sein Ziel erreichen, indem er wie folgt vorgeht:

Sei $N = 2015$ die Anzahl der Dosen.

(a) Er wählt Dose j genau $(N!/j)$-mal. Dann sind am Ende in Dose j genau

$$\sum_{k \neq j} k \cdot \frac{N!}{k} = (N-1) \cdot N!$$

Münzen.

(b) Er wählt Dose j genau einmal. Dann sind am Ende in Dose j genau $j + \sum_{k \neq j} k = \sum_k k$ Münzen.

(c) Er wählt Dose j genau $(N!/j - 1)$-mal. Dann sind am Ende in Dose j genau

$$N + 1 - j + \sum_{k \neq j} k \cdot \left(\frac{N!}{k} - 1\right) = N + 1 - j + \sum_{k \neq j} (N! - k) = (N-1)N! + (N+1) - \sum_k k$$

Münzen.

Die erhaltenen Ausdrücke sind jeweils unabhängig von j, sodass tatsächlich in jeder Dose dieselbe Anzahl an Münzen ist.

Wie kommt man auf diese Lösung? Der Ansatz war, dass wir Dose j genau x_j-mal wählen. Für das Ziel, überall dieselbe Anzahl zu erhalten, ist es unerheblich, ob in allen Dosen außer Dose j genau j Münzen dazugegeben werden oder ob in der Dose j genau j Münzen entfernt werden (wobei jetzt natürlich negative Zahlen erlaubt sein müssen). Wir suchen daher eine ganze Zahl M, sodass

$$(N+1-j) - jx_j = M \iff -j(1+x_j) = M - (N+1).$$

Nun wähle M so, dass $M-(N+1)$ negativ ist und durch alle j teilbar ist, also der Einfachheit halber $M-(N+1) = -N!$. Es ergibt sich $x_j = N!/j - 1$.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 1a. Für das Ziel, überall dieselbe Anzahl zu erhalten, ist es unerheblich, ob in allen Dosen außer Dose j genau j Münzen dazugegeben werden, oder ob in der Dose j genau j Münzen entfernt werden (wobei natürlich jetzt negative Anzahlen von Münzen erlaubt sein müssen).

Da in (b) in Dose j genau j Münzen sind, reicht es offensichtlich diese zu entfernen, indem jede Dose genau einmal gewählt wird, also kann Max sein Ziel erreichen.

In (a) können wir in Dose j genau die negativen Vielfachen von j erreichen und müssen also als Ziel nur ein negatives gemeinsames Vielfaches von $1, 2, \ldots, 2015$ wählen. Das existiert sicher und Max kann also wieder sein Ziel erreichen.

Durch die Lösung von Teil (a), in der jede Dose mindestens ein Mal gewählt wird und insgesamt zu jeder Dose gleich viele Münzen hinzugefügt werden, können wir eine Dose auch negativ oft wählen, da wir am Ende einfach genügend oft die Anzahlen von Teil (a) dazuzählen können, bis die Anzahlen in Summe positiv sind, ohne dass sich die Münzenanzahlen ändern.

In Teil (c) sind nun $2016-j$ Münzen in Dose j und es reicht daher nach der obigen Überlegung jede Dose (-1)-mal zu wählen, da das 2016 Münzen in jeder Dose ergibt. Max kann also wieder sein Ziel erreichen.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1b. Nehmen wir an, wir haben Teile (a) und (b) bereits mit einem beliebigen Verfahren gelöst (beispielsweise mit einem anderen der hier vorgeschlagenen Lösungswege).

Wenn wir Lösung (b) „-1 Mal“ anwenden könnten, hätten wir eine Lösung für (c). Zwar können wir Dosen nicht negativ oft wählen, aber wir können einige Male Lösung (a) anwenden und dabei jede Dose insgesamt so oft auslassen, wie wir sie in Lösung (b) gewählt hätten.

Nun müssen wir nur noch zeigen, dass diese Methode tatsächlich funktioniert:

Lemma. In Lösung (a) wurde jede Dose mindestens ein Mal gewählt.

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe eine Dose A, die nie gewählt wurde. Da laut Angabe mindestens ein Schritt ausgeführt werden muss, gibt es mindestens eine Dose B, die mindestens ein Mal gewählt wurde.

Jedes Mal, wenn eine Dose außer A und B gewählt wurde, wurden zu A und B gleich viele Münzen hinzugefügt. Jedes Mal, wenn Dose B gewählt wurde, wurden nur zu A Münzen hinzugefügt. Und Dose A wurde nie gewählt. Daher sind am Ende in A sicher mehr Münzen als in B, ein Widerspruch. ■

Für alle $1 \leq i \leq 2015$ bezeichne a_i und b_i, wie oft die Dose Nummer i in der Lösung zu (a) bzw. (b) gewählt wurde. Gemäß des Lemmas ist $a_i \geq 1$ für alle i. Daher kann man eine ausreichend große positive ganze Zahl K wählen, sodass $c_i := Ka_i - b_i > 0$ für alle i.

Gemäß der obigen Argumentation ist $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{2015})$ daher eine Lösung von (c). (Falls einem diese Argumentation zu „schwammig“ ist, lässt sich die Korrektheit auch leicht durch Einsetzen überprüfen.)

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2.

(a) Es sei N das kleinste gemeinsame Vielfache von $1, 2, \ldots, 2015$. Max wählt jede Zahl $1 \leq n \leq 2015$ genau $\frac{N}{n}$ Mal, wodurch zu allen anderen Dosen außer n jeweils $\frac{N}{n}$ Mal je n Münzen, also insgesamt N Münzen hinzugefügt werden. Nachdem er das für alle 2015 Werte von n wiederholt hat, wurden zu jeder der ursprünglich leeren Dosen jeweils $(2015 - 1) \cdot N$ Münzen hinzugefügt.

(Anmerkung: Alternativ kann auch das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2015$ als N verwendet werden.)

(b) Er wählt jede Zahl von 1 bis 2015 genau 1 Mal. Zu jeder Dose n werden dann

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n+1) + \cdots + 2015$$

Münzen hinzugefügt. Zusammen mit den n Münzen, die bereits zu Beginn in der Dose sind, ergibt das für jede Dose $1 + 2 + \cdots + 2015 = \frac{2015 \cdot 2016}{2} = 2031120$ Münzen.

(c) Zu Beginn befinden sich in jeder Dose n genau $2016 - n$ Münzen. Für jede Zahl n sei x_n die Anzahl, wie oft Max die Zahl n wählt. Dann befinden sich am Ende in jeder Dose n genau

$$\begin{aligned}(2016-n) + 1x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + (n+1)x_{n+1} + \cdots + 2015x_{2015} \\ = (2016-n) + 1x_1 + 2x_2 + \cdots + 2015x_{2015} - nx_n\end{aligned}$$

Münzen.

Wir setzen $X := 1x_1 + 2x_2 + \cdots + 2015x_{2015}$, dann vereinfacht sich dies zu $X - nx_n + 2016 - n$ Münzen. Da in allen Dosen gleich viele Münzen sein sollen, setzen wir diese Werte gleich und erhalten

$$\begin{aligned}\text{Anzahl Münzen pro Dose am Ende} &= X - 1x_1 + 2015 \\ &= X - 2x_2 + 2014 \\ &= X - 3x_3 + 2013 \\ &= X - 4x_4 + 2012 \\ &\vdots \\ &= X - 2014x_{2014} + 2 \\ &= X - 2015x_{2015} + 1.\end{aligned}$$

Sei $N = 2015x_{2015}$. Wenn wir jeweils aufeinanderfolgende Gleichungen der obigen Gleichungskette betrachten, erhalten wir daraus (mit der letzten Gleichung beginnend) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}2015x_{2015} & &&= N, \\ 2014x_{2014} &= 2015x_{2015} + 1 &&= N + 1, \\ 2013x_{2013} &= 2014x_{2014} + 1 &&= N + 2, \\ 2012x_{2012} &= 2013x_{2013} + 1 &&= N + 3, \\ &\vdots &&\vdots \\ 1x_1 &= 2x_2 + 1 &&= N + 2014.\end{aligned}$$

Wir finden genau dann ganzzahlige Werte für $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}$, die diese Gleichungen alle erfüllen, wenn wir einen Wert N finden, sodass

$$\begin{aligned} N &\equiv 0 \pmod{2015}, \\ N+1 &\equiv 0 \pmod{2014}, \\ N+2 &\equiv 0 \pmod{2013}, \\ &\vdots \\ N+2012 &\equiv 0 \pmod{3}, \\ N+2013 &\equiv 0 \pmod{2}, \\ N+2014 &\equiv 0 \pmod{1}. \end{aligned}$$

Dies lässt sich zusammenfassen als

$$N \equiv -2015 \pmod{k} \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq 2015.$$

Damit uns der Chinesische Restsatz die Existenz eines solchen N liefert, müssen wir sicherstellen, dass die Kongruenzbedingungen einander nicht widersprechen. Dazu genügt es für alle $i \neq j$ zu zeigen, dass $-2015 \equiv -2015 \pmod{\operatorname{ggT}(i,j)}$, was offensichtlich wahr ist.

Somit gibt es keine Widersprüche unter den simultanen Kongruenzen. Da alle Schritte Äquivalenzumformungen waren, haben wir damit eine Lösung gefunden, die alle Bedingungen erfüllt.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2a.

(c) Wie in der vorigen Lösung erhalten wir die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \text{Anzahl Münzen pro Dose am Ende} &= X - 1x_1 + 2015 \\ &= X - 2x_2 + 2014 \\ &= X - 3x_3 + 2013 \\ &= X - 4x_4 + 2012 \\ &\vdots \\ &= X - 2014x_{2014} + 2 \\ &= X - 2015x_{2015} + 1. \end{aligned}$$

Wir betrachten die erste und die zweite Zeile modulo 2 und erhalten $X-1x_1+2015 \equiv X-2x_2+2014 \pmod{2}$, also $x_1 \equiv -1 \pmod{2}$.

Die erste und dritte Zeile betrachten wir modulo 3 und erhalten $X - 1x_1 + 2015 \equiv X - 3x_3 + 2013 \pmod{3}$, also $x_1 \equiv -1 \pmod{3}$.

Wenn wir das fortsetzen und jeweils die erste und die k-te Zeile modulo k betrachten, erhalten wir $X - 1x_1 + 2015 \equiv X - kx_k + 2016 - k \pmod{k}$, also

$$x_1 \equiv -1 \pmod{k} \quad \text{für alle ganzen Zahlen } 2 \leq k \leq 2015.$$

Offensichtlich ist -1 eine Lösung aller Kongruenzen, und somit weiters auch

$$-1 + C \cdot \operatorname{kgV}(2, 3, \ldots, 2015)$$

für alle ganzen Zahlen C. Wir wählen eine beliebige positive Lösung dieses Kongruenzensystems als x_1.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass mit dieser Wahl von x_1 auch alle anderen x_k ganzzahlig sind. Für jede ganze Zahl $2 \leq k \leq 2015$ ist $x_1 + 1$ durch k teilbar gemäß der geforderten Kongruenzen, also setzen wir $y_k := \frac{x_1+1}{k}$ und erhalten eine positive ganze Zahl y_k. Damit gilt nun:

$$\begin{aligned} & & X - 1x_1 + 2015 &= X - kx_k + 2016 - k & &\Big| -X - 2016 \\ &\iff & -1 - x_1 &= -k \cdot (x_k + 1) & &\Big| \cdot -1 \\ &\iff & k \cdot y_k &= k \cdot (x_k + 1) & &\Big| : k \\ &\iff & y_k &= x_k + 1 \end{aligned}$$

Daher ist auch $x_k = y_k - 1 = \frac{x_1+1}{k} - 1$ eine nicht-negative ganze Zahl, und alles ist bewiesen.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 3. Für das Ziel, überall dieselbe Anzahl zu erhalten, ist es unerheblich, ob in allen Dosen außer Dose j genau j Münzen dazugegeben werden, oder ob in der Dose j genau j Münzen entfernt werden (wobei natürlich jetzt negative Zahlen erlaubt sein müssen).

Wenn sich also zu Beginn d_j Münzen in Dose j befinden, dann muss Max eine Zahl X finden, sodass

$$X \equiv d_j \pmod{j} \qquad \text{für } j = 1, \ldots, 2015.$$

Wenn dieses System von Kongruenzen eine Lösung hat, dann hat es auch unendlich viele strikt negative Lösungen. Die Einschränkung, dass die j Münzen immer entfernt werden und dass mindestens ein Schritt durchgeführt werden muss, ist dann also automatisch erfüllbar, und es gilt daher, dass die ursprüngliche Aufgabe genau dann lösbar ist, wenn das System an Kongruenzen eine Lösung besitzt.

Nach dem Chinesischen Restsatz ist das genau dann der Fall, wenn die Kongruenzen kompatibel sind, also $\mathrm{ggT}(i,j) \mid d_i - d_j$ für alle $1 \leq i, j \leq 2015$ gilt. Da trivialerweise $\mathrm{ggT}(i,j) \mid i - j$ gilt, reicht es also, wenn

$$i - j \mid d_i - d_j \qquad \text{für } 1 \leq i, j \leq 2015.$$

Wir zeigen nun, dass Max sein Ziel in allen drei Fällen erreichen kann, indem wir diese Bedingung nachprüfen:

(a) Es gilt offensichtlich $i - j \mid 0 - 0 = 0$.

(b) Es gilt ebenfalls $i - j \mid i - j$.

(c) Es gilt wieder $i - j \mid (2016 - i) - (2016 - j) = -(i - j)$.

(Theresia Eisenkölbl) □