Naloga T–1

Določite vse trojice (a, b, c) realnih števil, ki zadoščajo sistemu enačb

$$a^2 + ab + c = 0,$$
$$b^2 + bc + a = 0,$$
$$c^2 + ca + b = 0.$$

Naloga T–2

Množico realnih števil označimo z $\mathbb{R}$. Določite vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

za vsa realna števila x in y.

Naloga T–3

Zemljišče v obliki 8×8 kvadrata, katerega stranice so orientirane sever–jug in vzhod–zahod, sestoji iz 64 manjših 1×1 kvadratnih parcel. Na posamezni parceli je lahko največ ena hiša. Hiša lahko zasede le eno 1×1 parcelo.

Pravimo, da je hiša *v senci*, če je na vsaki od treh sosednjih parcel na vzhodu, zahodu in jugu po ena hiša.

Največ koliko hiš lahko hkrati obstaja, tako da nobena od njih ni v senci?

Opomba: Po definiciji hiše na vzhodnem, zahodnem in južnem robu zemljišča niso nikoli v senci.

Naloga T–4

Razred srednješolcev je pisal test. Vsako vprašanje je bilo ocenjeno z 1 točko za pravilen odgovor in 0 točkami sicer. Vemo, da je na vsako vprašanje pravilno odgovoril vsaj en dijak in da niso vsi dijaki imeli enakega skupnega števila točk na testu.

Dokažite, da je na testu obstajalo vprašanje z naslednjo lastnostjo: povprečje skupnega števila točk dijakov, ki so na to vprašanje odgovorili pravilno, je bilo višje od povprečja ostalih dijakov.

Naloga T–5

Naj bo ABC ostrokotni trikotnik z $|AB| \neq |AC|$ in O središče njemu očrtane krožnice. Premica AO ponovno seka trikotniku ABC očrtano krožnico ω v točki D in premico BC v točki E. Trikotniku CDE očrtana krožnica ponovno seka premico CA v točki P. Premica PE seka premico AB v točki Q. Vzporednica premici PE skozi točko O seka višino iz oglišča A trikotnika ABC v točki F.

Dokažite, da velja $|FP| = |FQ|$.

Naloga T–6

Naj bo ABC trikotnik z $|AB| \neq |AC|$. Naj bodo točke K, L, M zaporedoma razpolovišča stranic BC, CA, AB. Trikotniku ABC včrtana krožnica s središčem I se dotika stranice BC v točki D. Premica g skozi razpolovišče daljice ID, ki je pravokotna na premico IK, seka premico LM v točki P.

Dokažite, da velja $\sphericalangle PIA = 90°$.

Naloga T–7

Naravnemu številu n pravimo *Mozartovo število*, če v (desetiškem) zapisu števil $1, 2, \ldots, n$ vsaka števka skupno nastopa sodo mnogokrat.

Dokažite:

(a) Vsa Mozartova števila so soda.

(b) Obstaja neskončno mnogo Mozartovih števil.

Naloga T–8

Obravnavamo enačbo $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, kjer so a, b, c naravna števila.

Dokažite:

(a) Pri $n = 2017$ ne obstaja rešitev (a, b, c) te enačbe.

(b) Pri $n = 2016$ mora v vsaki rešitvi (a, b, c) te enačbe biti a deljiv s 3.

(c) Pri $n = 2016$ ima enačba neskončno mnogo rešitev (a, b, c) .

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.