Úloha T–1

Určte všetky trojice reálnych čísel (a, b, c), spĺňajúce sústavu rovníc

$$\begin{aligned} a^2 + ab + c &= 0, \\ b^2 + bc + a &= 0, \\ c^2 + ca + b &= 0. \end{aligned}$$

Úloha T–2

Nech $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

platí pre všetky reálne čísla x a y.

Úloha T–3

Územie tvaru štvorca 8×8, ktorého strany majú orientáciu sever–juh a východ–západ, je tvorené 64 menšími štvorcovými pozemkami 1×1. Na každom jednotlivom pozemku môže stáť najviac jeden dom. Každý dom môže stáť len na jednom štvorcovom pozemku 1×1.

Hovoríme, že dom je *blokovaný od slnka* ak stoja tri domy na pozemkoch bezprostredne na východ, západ a juh od neho.

Aký je maximálny počet domov, ktoré môžu naraz stáť v tomto území tak, že žiaden z nich nie je blokovaný od slnka?

Poznámka: Podľa definície, domy na východnej, západnej a južnej hranici územia nie sú nikdy blokované od slnka.

Úloha T–4

Trieda stredoškolských študentov písala test. Každá otázka bola bodovaná buď 1 bodom za správnu odpoveď, alebo 0 bodmi inak. Každá otázka bola správne zodpovedaná aspoň jedným študentom a nie všetci študenti dosiahli rovnaký celkový počet bodov.

Dokáže, že v teste bola otázka s nasledujúcou vlastnosťou: Študenti, ktorí zodpovedali túto otázku správne dosiahli vyšší priemerný celkový počet bodov ako tí, čo na túto otázku neodpovedali správne.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.

Úloha T–5

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|AB| \neq |AC|$, pričom O je stredom jeho opísanej kružnice ω. Priamka AO pretína kružnicu ω druhýkrát v bode D, a priamku BC v bode E. Kružnica opísaná trojuholníku CDE pretína priamku CA druhýkrát v bode P. Priamka PE pretína priamku AB v bode Q. Priamka cez bod O rovnobežná s PE pretína výšku trojuholníka ABC z bodu A v bode F.

Dokážte, že $|FP| = |FQ|$.

Úloha T–6

Nech ABC je trojuholník s $|AB| \neq |AC|$. Body K, L, M sú stredmi strán BC, CA, AB v tomto poradí. Kružnica so stredom I vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strany BC v bode D. Priamka g, ktorá prechádza stredom úsečky ID a je kolmá na IK, pretína priamku LM v bode P.

Dokážte, že $|\measuredangle PIA| = 90^\circ$.

Úloha T–7

Kladné celé číslo n nazveme *mozartovské číslo* ak je v postupnosti $1, 2, \ldots, n$ napísaná každá cifra párny počet krát (v desiatkovej sústave).

Dokážte nasledujúce tvrdenia:

(a) Všetky mozartovské čísla sú párne.

(b) Existuje nekonečne veľa mozartovských čísel.

Úloha T–8

Uvažujme rovnicu $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, kde a, b, c sú kladné celé čísla.

Dokážte nasledujúce tvrdenia:

(a) Pre $n = 2017$, rovnica nemá riešenie (a, b, c).

(b) Pre $n = 2016$, v každom riešení (a, b, c) musí byť a deliteľné 3.

(c) Pre $n = 2016$, má rovnica nekonečne veľa riešení (a, b, c).