Zawody drużynowe
25 sierpnia 2016

Polish version

Zadanie T–1

Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniających układ równań

$$\begin{aligned} a^2 + ab + c &= 0, \\ b^2 + bc + a &= 0, \\ c^2 + ca + b &= 0. \end{aligned}$$

Zadanie T–2

Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że równość

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y.

Zadanie T–3

Obszar ziemi w kształcie kwadratu 8×8, którego boki położone są w kierunkach północ–południe i wschód–zachód, składa się z 64 działek w kształcie kwadratów 1×1. Na każdej działce może stać co najwyżej jeden dom. Każdy dom może zajmować pojedynczą działkę.

Powiemy, że dom jest *chroniony przed słońcem* jeśli na sąsiednich działkach znajdujących się na wschód, zachód i południe stoją trzy domy.

Jaka jest największa możliwa liczba domów, które mogą jednocześnie stać tak, aby żaden z nich nie był chroniony przed słońcem?

Uwaga: Z definicji, domy przy wschodniej, zachodniej i południowej granicy obszaru nigdy nie są chronione przez słońce.

Zadanie T–4

Uczniowie pewnej klasy szkoły średniej pisali test. Każde pytanie było oceniane w następujący sposób: 1 punkt za poprawną odpowiedź lub 0 punktów w przeciwnym przypadku. Wiadomo, że na każde pytanie została udzielona poprawna odpowiedź przez co najmniej jednego ucznia a ponadto nie wszyscy uczniowie w całym teście uzyskali ten sam wynik.

Udowodnić, że na teście było pytanie o następującej własności: Średnia liczba punktów za cały test uczniów, którzy poprawnie odpowiedzieli na to pytanie jest większa, niż średnia liczba punktów pozostałych uczniów.

Zadanie T–5

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego ω na tym trójkącie. Prosta AO przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie D oraz prostą BC w punkcie E. Okrąg opisany na trójkącie CDE przecina prostą CA po raz drugi w punkcie P. Prosta PE przecina prostą AB w punkcie Q. Prosta przechodząca przez O równoległa do PE przecina wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka A w punkcie F.

Udowodnić, że $FP = FQ$.

Zadanie T–6

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkty K, L, M są środkami odpowiednio boków BC, CA, AB. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Prosta g, która przechodzi przez środek odcinka ID i jest prostopadła do prostej IK przecina prostą LM w punkcie P.

Wykazać, że $\angle PIA = 90^\circ$.

Zadanie T–7

Powiemy, że liczba całkowita dodatnia n jest *mozartowska*, jeśli w ciągu liczb $1, 2, \ldots, n$ każda z cyfr łącznie występuje parzystą liczbę razy (w systemie dziesiętnym).

Udowodnić, że:

(a) Wszystkie liczby mozartowskie są parzyste.

(b) Istnieje nieskończenie wiele liczb mozartowskich.

Zadanie T–8

Rozważamy równanie $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, gdzie a, b, c są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Wykazać, że:

(a) Nie ma rozwiązań (a, b, c) dla $n = 2017$.

(b) Dla $n = 2016$ liczba a musi być podzielna przez 3 dla dowolnego rozwiązania (a, b, c).

(c) Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (a, b, c) dla $n = 2016$.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.