Užduotis T–1

Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (a, b, c), tenkinančius lygčių sistemą

$$a^2 + ab + c = 0,$$
$$b^2 + bc + a = 0,$$
$$c^2 + ca + b = 0.$$

Užduotis T–2

Realiųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{R}$. Raskite visas tokias funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

su bet kokiais $x, y \in \mathbb{R}$.

Užduotis T–3

Žemės ruožas yra 8×8 kvadrato formos. Šio kvadrato kraštinės nukreiptos šiaurės-pietų bei rytų-vakarų kryptimis. Ruožą sudaro 64 kvadratiniai 1×1 sklypai. Bet kuriame sklype gali stovėti daugiausiai vienas namas. Namas turi sutilpti viename sklype.

Sakysime, kad namas *negauna saulės šviesos*, jei gretimuose sklypuose iš rytų, vakarų ir pietų stovi po namą.

Kiek daugiausiai vienu metu gali būti namų, gaunančių saulės šviesą?

Pastaba: namas ties rytiniu, vakariniu arba pietiniu ruožo kraštu gauna saulės šviesą.

Užduotis T–4

Vienos klasės mokiniai parašė testą. Už kiekvieną klausimą buvo galima gauti 1 tašką, teisingai į jį atsakius, arba 0 taškų priešingu atveju. Į kiekvieną klausimą teisingai atsakė bent vienas mokinys, ir ne visi mokiniai surinko tą pačią taškų sumą.

Įrodykite, kad kuris nors testo klausimas tenkina tokią salygą: į jį teisingai atsakiusių mokinių surinktų taškų sumų (aritmetinis) vidurkis didesnis už į jį teisingai neatsakiusiųjų atitinkamą vidurkį.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.

Užduotis T–5

Smailiojo trikampio ABC ($AB \neq AC$) apibrėžtinio apskritimo ω centras pažymėtas O. Tiesė AO kerta ω taškuose A ir D, o tiesę BC – taške E. Trikampio CDE apibrėžtinis apskritimas kerta tiesę CA taškuose C ir P. Tiesės PE ir AB kertasi taške Q. Tiesė, einanti per O ir lygiagreti su PE, kerta trikampio ABC aukštinę, išvestą iš viršūnės A, taške F.

Įrodykite, kad $FP = FQ$.

Užduotis T–6

Trikampio ABC ($AB \neq AC$) kraštinių BC, CA, AB vidurio taškai atitinkamai pažymėti K, L, M. Trikampio ABC įbrėžtinis apskritimas su centru I liečia kraštinę BC taške D. Tiesė g, einanti per atkarpos ID vidurio tašką ir statmena IK, kerta tiesę LM taške P.

Įrodykite, kad $\measuredangle PIA = 90°$.

Užduotis T–7

Natūralusis skaičius n vadinamas *Mocarto skaičiumi*, jei surašant skaičius 1, 2, ..., n kiekvienas skaitmuo panaudojamas lyginį skaičių kartų (dešimtainėje sistemoje).

Įrodykite:

(a) visi Mocarto skaičiai lyginiai;

(b) Mocarto skaičių yra be galo daug.

Užduotis T–8

Nagrinėkime lygtį $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$. Čia a, b, c yra natūralieji skaičiai.

Įrodykite, kad:

(a) lygtis neturi sprendinių (a, b, c), kai $n = 2017$;

(b) kai $n = 2016$, bet kuriam sprendiniui (a, b, c) skaičius a dalijasi iš 3;

(c) lygtis turi be galo daug sprendinių (a, b, c), kai $n = 2016$.