

Užduotis T-1

Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (a, b, c) , tenkinančius lygčių sistemą

$$a^2 + ab + c = 0,$$

$$b^2 + bc + a = 0,$$

$$c^2 + ca + b = 0.$$

Užduotis T-2

Realiųjų skaičių aibė žymima \mathbb{R} . Raskite visas tokias funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kad

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

su bet kokiais $x, y \in \mathbb{R}$.

Užduotis T-3

Žemės ruožas yra 8×8 kvadrato formos. Šio kvadrato kraštinės nukreiptos šiaurės-pietų bei rytų-vakarų kryptimis. Ruožą sudaro 64 kvadratiniai 1×1 sklypai. Bet kuriame sklype gali stovėti daugiausiai vienas namas. Namas turi sutilti viename sklype.

Sakysime, kad namas *negauna saulės šviesos*, jei gretimuose sklypuose iš rytų, vakarų ir pietų stovi po namą.

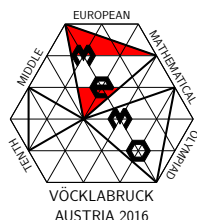
Kiek daugiausiai vienu metu gali būti namų, gaunančių saulės šviesą?

Pastaba: namas ties rytiniu, vakariniu arba pietiniu ruožo kraštu gauna saulės šviesą.

Užduotis T-4

Vienos klasės mokiniai parašė testą. Už kiekvieną klausimą buvo galima gauti 1 tašką, teisingai į jį atsakius, arba 0 taškų priešingu atveju. Į kiekvieną klausimą teisingai atsakė bent vienas mokinys, ir ne visi mokiniai surinko tą pačią taškų sumą.

Įrodykite, kad kuris nors testo klausimas tenkina tokią sąlygą: į jį teisingai atsakiusių mokinių surinktų taškų sumų (aritmetinis) vidurkis didesnis už į jį teisingai neatsakiusių atitinkamą vidurkį.



Užduotis T-5

Smailiojo trikampio ABC ($AB \neq AC$) apibrėžtinio apskritimo ω centras pažymėtas O . Tiesė AO kerta ω taškuose A ir D , o tiesę BC – taške E . Trikampio CDE apibrėžtinis apskritimas kerta tiesę CA taškuose C ir P . Tiesės PE ir AB kertasi taške Q . Tiesė, einanti per O ir lygiagreti su PE , kerta trikampio ABC aukštinę, išvestą iš viršūnės A , taške F .

Įrodykite, kad $FP = FQ$.

Užduotis T-6

Trikampio ABC ($AB \neq AC$) kraštinių BC , CA , AB vidurio taškai atitinkamai pažymėti K , L , M . Trikampio ABC įbrėžtinis apskritimas su centru I liečia kraštinę BC taške D . Tiesė g , einanti per atkarpos ID vidurio tašką ir statmena IK , kerta tiesę LM taške P .

Įrodykite, kad $\sphericalangle PIA = 90^\circ$.

Užduotis T-7

Natūraliusis skaičius n vadinamas *Mocarto skaičiumi*, jei surašant skaičius $1, 2, \dots, n$ kiekvienas skaitmuo panaudojamas lyginį skaičių kartų (dešimtainėje sistemoje).

Įrodykite:

- (a) visi Mocarto skaičiai lyginiai;
- (b) Mocarto skaičių yra be galo daug.

Užduotis T-8

Nagrinėkime lygtį $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$. Čia a, b, c yra natūralieji skaičiai.

Įrodykite, kad:

- (a) lygtis neturi sprendinių (a, b, c) , kai $n = 2017$;
- (b) kai $n = 2016$, bet kuriam sprendiniui (a, b, c) skaičius a dalijasi iš 3;
- (c) lygtis turi be galo daug sprendinių (a, b, c) , kai $n = 2016$.