T–1. Feladat

Határozzátok meg az összes olyan (a, b, c) valós számhármast, mely kielégíti a következő egyenletrendszert:

$$a^2 + ab + c = 0,$$
$$b^2 + bc + a = 0,$$
$$c^2 + ca + b = 0.$$

T–2. Feladat

Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Határozzátok meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

teljesül minden x és y valós számra.

T–3. Feladat

Egy 8×8-as négyzetalakú földterület, melynek oldalai észak-déli és kelet-nyugati irányúak, 64 kisebb 1×1-es négyzetalakú telekből áll. Minden egyes telken legfeljebb egy ház állhat. Egy ház csak egy 1×1-es telket foglalhat el.

Egy házra azt mondjuk, hogy *blokkolva van a napfény elől*, ha a tőle közvetlenül keletre, nyugatra és délre fekvő telken is áll egy-egy ház.

Legfeljebb hány ház lehet egyszerre a földterületen, úgy hogy egyik se legyen blokkolva a napfény elől?

Megjegyzés: Definíció szerint, a földterület keleti, nyugati illetve déli határán álló házak nincsenek blokkolva a napfény elől.

T–4. Feladat

Egy középiskolai osztály minden tanulója megírt egy tesztet. Minden kérdésre 1 pontot lehetett kapni helyes válasz esetén, különben 0-t. Tudjuk, hogy minden kérdésre legalább egy tanuló helyesen válaszolt, és nem minden tanulónak lett ugyanannyi az összpontszáma.

Bizonyítsátok be, hogy a teszten volt egy olyan kérdés, melyre teljesül az, hogy az átlagpontszáma azon tanulóknak, akik helyesen válaszoltak erre a kérdésre, magasabb, mint azon tanulók átlagpontszáma, akik nem.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

T–5. Feladat

Legyen az ABC hegyesszögű háromszög olyan, hogy $AB \neq AC$, és jelölje ω a körülírt körét, annak középpontját pedig O. Az AO egyenes ω-t másodszorra a D pontban metszi, míg a BC egyenest az E pontban. A CDE háromszög körülírt köre a CA egyenest másodszorra a P pontban metszi. A PE egyenes az AB egyenest a Q pontban metszi. Az O-n áthaladó, PE-vel párhuzamos egyenes az F pontban metszi az ABC háromszög A-ból induló magasságvonalát.

Bizonyítsátok be, hogy $FP = FQ$.

T–6. Feladat

Legyen az ABC háromszög olyan, hogy $AB \neq AC$. A K, L illetve M pontok rendre a BC, CA illetve AB oldalak felezőpontjai. Az ABC háromszög I középpontú beírt köre a BC oldalt a D pontban érinti. A g egyenes áthalad az ID szakasz felezőpontján és merőleges IK-ra. A g egyenes az LM egyenest a P pontban metszi.

Bizonyítsátok be, hogy $PIA\sphericalangle = 90^\circ$.

T–7. Feladat

A n pozitív egész számot *Mozart-számnak* nevezzük, ha az $1, 2, \ldots, n$ számok együttesen minden számjegyet páros sokszor tartalmaznak (10-es számrendszerben).

Bizonyítsátok be, hogy

(a) minden Mozart-szám páros.

(b) végtelen sok Mozart-szám létezik.

T–8. Feladat

Tekintsük az $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$ egyenletet, ahol a, b és c pozitív egész számok. Bizonyítsátok be, hogy

(a) $n = 2017$ esetén nem létezik olyan (a, b, c) számhármas, mely megoldása az egyenletnek.

(b) $n = 2016$ esetén minden (a, b, c) megoldásra a egy hárommal osztható szám.

(c) $n = 2016$ esetén végtelen sok (a, b, c) megoldás létezik.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.