Aufgabe T–1

Bestimme alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a^2 + ab + c = 0,$$
$$b^2 + bc + a = 0,$$
$$c^2 + ca + b = 0.$$

Aufgabe T–2

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

für alle reellen Zahlen x und y gilt.

Aufgabe T–3

Ein Landstück hat die Form eines 8×8-Quadrates, dessen Seiten in Nord-Süd- beziehungsweise Ost-West-Richtung verlaufen, und besteht aus 64 kleineren quadratischen 1×1-Grundstücken. Auf jedem solchen Grundstück kann höchstens ein Haus stehen. Ein Haus steht auf höchstens einem 1×1-Grundstück.

Wir sagen, ein Haus *steht im Schatten*, wenn drei Häuser auf den im Osten, Westen und Süden direkt angrenzenden Grundstücken stehen.

Was ist die größtmögliche Anzahl an Häusern auf dem Landstück, sodass keines davon im Schatten steht?

Bemerkung: Gemäß Definition stehen Häuser an der Ost-, West- und Südgrenze des Landstücks niemals im Schatten.

Aufgabe T–4

Die Schüler einer Klasse haben einen Test geschrieben. Jede Aufgabe wurde entweder mit 1 Punkt für eine richtige Lösung oder andernfalls mit 0 Punkten bewertet. Es ist bekannt, dass jede Aufgabe von mindestens einem Schüler richtig gelöst wurde und die Schüler nicht alle dieselbe Gesamtpunktezahl erreicht haben.

Zeige, dass es eine Aufgabe des Tests mit folgender Eigenschaft gibt: Die Schüler, die diese Aufgabe richtig gelöst haben, erzielten im Durchschnitt eine höhere Gesamtpunktezahl als diejenigen Schüler, die diese Aufgabe nicht richtig gelöst haben.

Aufgabe T–5

Seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB \neq AC$ und O sein Umkreismittelpunkt. Die Gerade AO schneide den Umkreis ω von ABC ein weiteres Mal im Punkt D und die Gerade BC im Punkt E. Der Umkreis von CDE schneide die Gerade CA ein weiteres Mal im Punkt P. Die Gerade PE schneide die Gerade AB im Punkt Q. Die Gerade durch O parallel zu PE schneide die Höhe im Dreieck ABC durch A im Punkt F.

Zeige $FP = FQ$.

Aufgabe T–6

Sei ABC ein Dreieck mit $AB \neq AC$. Seien K, L und M die Mittelpunkte der Seiten BC, CA beziehungsweise AB. Der Inkreis von ABC mit Mittelpunkt I berühre die Seite BC im Punkt D. Die Gerade g, die durch den Mittelpunkt der Strecke ID verläuft und senkrecht zur Geraden IK ist, schneide LM im Punkt P.

Zeige $\measuredangle PIA = 90^\circ$.

Aufgabe T–7

Eine positive ganze Zahl n heiße *Mozartzahl*, wenn jede Ziffer (zur Basis 10) in den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ insgesamt in gerader Anzahl vorkommt.

Zeige:

(a) Alle Mozartzahlen sind gerade.

(b) Es gibt unendlich viele Mozartzahlen.

Aufgabe T–8

Wir betrachten die Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$ mit positiven ganzen Zahlen a, b, c.

Zeige:

(a) Für $n = 2017$ gibt es keine Lösungen (a, b, c).

(b) Für $n = 2016$ muss in jeder Lösung (a, b, c) die Zahl a durch 3 teilbar sein.

(c) Für $n = 2016$ hat die Gleichung unendlich viele Lösungen (a, b, c).

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Juryanfragen: 60 min
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.