

Problème T-1

Trouver tous les triplets (a, b, c) de nombres réels qui satisfont le système d'équations

$$a^2 + ab + c = 0,$$

$$b^2 + bc + a = 0,$$

$$c^2 + ca + b = 0.$$

Problème T-2

On rappelle que \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels. Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

pour tous nombres réels x et y .

Problème T-3

On considère un grand terrain ayant la forme d'un carré 8×8 avec les côtés orientés nord-sud et est-ouest constitué de 64 parcelles 1×1 . Sur chacune des parcelles individuelles, il peut y avoir au plus une maison. Chaque maison occupe une unique parcelle 1×1 .

On dit qu'une maison est à l'ombre si il y a trois maisons sur les parcelles situées immédiatement à l'est, à l'ouest et au sud de celle-ci.

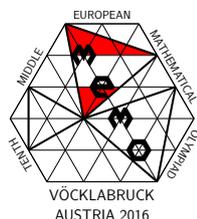
Quel est le nombre maximum de maisons telles qu'aucune n'est à l'ombre ?

Remarque : Par définition, une maison située sur un des bords sud, est ou ouest ne peut pas être à l'ombre.

Problème T-4

Une classe de collégiens a écrit un test. Chaque question donne 1 point pour une réponse correcte et 0 points pour une réponse incorrecte. On sait que pour chaque question, au moins un élève a donné une réponse correcte, et que les élèves n'ont pas tous obtenu le même score total.

Prouver qu'il existe une question dans le test avec la propriété suivante : La moyenne des scores totaux obtenus par ceux qui ont répondu correctement à cette question est strictement plus grande que la moyenne des scores totaux obtenus par les autres.



Problème T-5

Soit ABC un triangle aigu avec $AB \neq AC$, et soit O le centre de son cercle circonscrit. La droite AO coupe ω , le cercle circonscrit à ABC , une seconde fois en D , et elle coupe la droite BC en E . Le cercle circonscrit à CDE coupe la droite CA une seconde fois en P . La droite PE coupe la droite AB en Q . Soit F l'intersection de la droite parallèle à PE passant par O avec la hauteur du triangle ABC passant par A .

Prouver que $FP = FQ$.

Problème T-6

Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$. Les points K , L , resp. M sont les milieux des côtés BC , CA , resp. AB . Le cercle inscrit du triangle ABC admet le point I comme centre et touche le côté BC en D . Soit P le point d'intersection de la droite LM avec g , la droite perpendiculaire à IK passant par le milieu du segment ID .

Prouver que $\angle PIA = 90^\circ$.

Problème T-7

Un entier n strictement positif est appelé *nombre mozartien* si chacun des chiffres de 0 à 9 est utilisé au total un nombre pair de fois pour écrire les nombres $1, 2, \dots, n$ (tous les nombres sont écrits en base 10).

Prouver que :

- Tous les nombres mozartiens sont pairs.
- Il existe une infinité de nombres mozartiens.

Problème T-8

On considère l'équation $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, avec a, b, c des entiers strictement positifs.

Prouver que :

- Il n'existe aucune solution (a, b, c) si $n = 2017$.
- Si $n = 2016$, toute solution (a, b, c) vérifie que a est divisible par 3.
- L'équation admet une infinité de solutions (a, b, c) si $n = 2016$.