Problème T–1

Trouver tous les triplets (a, b, c) de nombres réels qui satisfont le système d'équations

$$\begin{aligned} a^2 + ab + c &= 0, \\ b^2 + bc + a &= 0, \\ c^2 + ca + b &= 0. \end{aligned}$$

Problème T–2

On rappelle que $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

pour tous nombres réels x et y.

Problème T–3

On considère un grand terrain ayant la forme d'un carré 8×8 avec les côtés orientés nord–sud et est–ouest constitué de 64 parcelles 1×1. Sur chacune des parcelles individuelles, il peut y avoir au plus une maison. Chaque maison occupe une unique parcelle 1×1.

On dit qu'une maison est *à l'ombre* si il y a trois maisons sur les parcelles situées immédiatement à l'est, à l'ouest et au sud de celle-ci.

Quel est le nombre maximum de maisons telles qu'aucune n'est à l'ombre ?

Remarque : Par définition, une maison située sur un des bords sud, est ou ouest ne peut pas être à l'ombre.

Problème T–4

Une classe de collégiens a écrit un test. Chaque question donne 1 point pour une réponse correcte et 0 points pour une réponse incorrecte. On sait que pour chaque question, au moins un élève a donné une réponse correcte, et que les élèves n'ont pas tous obtenu le même score total.

Prouver qu'il existe une question dans le test avec la propriété suivante : La moyenne des scores totaux obtenus par ceux qui ont répondu correctement à cette question est strictement plus grande que la moyenne des scores totaux obtenus par les autres.

Durée: 5 heures
Temps pour les questions: 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.

Problème T–5

Soit ABC un triangle aigu avec $AB \neq AC$, et soit O le centre de son cercle circonscrit. La droite AO coupe ω, le cercle circonscrit à ABC, une seconde fois en D, et elle coupe la droite BC en E. Le cercle circonscrit à CDE coupe la droite CA une seconde fois en P. La droite PE coupe la droite AB en Q. Soit F l'intersection de la droite parallèle à PE passant par O avec la hauteur du triangle ABC passant par A.

Prouver que $FP = FQ$.

Problème T–6

Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$. Les points K, L, resp. M sont les milieux des côtés BC, CA, resp. AB. Le cercle inscrit du triangle ABC admet le point I comme centre et touche le côté BC en D. Soit P le point d'intersection de la droite LM avec g, la droite perpendiculaire à IK passant par le milieu du segment ID.

Prouver que $\measuredangle PIA = 90°$.

Problème T–7

Un entier n strictement positif est appelé *nombre mozartien* si chacun des chiffres de 0 à 9 est utilisé au total un nombre pair de fois pour écrire les nombres 1, 2, …, n (tous les nombres sont écrits en base 10).

Prouver que :

(a) Tous les nombres mozartiens sont pairs.

(b) Il existe une infinité de nombres mozartiens.

Problème T–8

On considère l'équation $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, avec a, b, c des entiers strictement positifs.

Prouver que :

(a) Il n'existe aucune solution (a, b, c) si $n = 2017$.

(b) Si $n = 2016$, toute solution (a, b, c) vérifie que a est divisible par 3.

(c) L'équation admet une infinité de solutions (a, b, c) si $n = 2016$.