Příklad T–1

Určete všechny trojice (a, b, c) reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} a^2 + ab + c &= 0, \\ b^2 + bc + a &= 0, \\ c^2 + ca + b &= 0. \end{aligned}$$

Příklad T–2

Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

platí pro všechna reálná čísla x a y.

Příklad T–3

Čtverecové území 8×8, jehož strany jsou orientovány ve směrech sever–jih a východ–západ, je složena ze 64 parcel 1×1. Na každé parcele může být postaven nejvýše jeden dům, jehož základy jsou shodné právě s touto parcelou.

Řekneme, že dům je ve *slunečním stínu*, právě když existují tři domy na parcelách bezprostředně s ním sousedících současně na východě, jihu i na západě.

Jaký maximální počet domů lze současně postavit na daném čtvercovém území tak, aby žádný z nich nebyl ve slunečním stínu?

Poznámka. Domy na východní, jižní a západní straně celého území nejsou ve slunečním stínu.

Příklad T–4

Žáci střední školy psali test. Každá otázka byla hodnocena buď jedním bodem za správnou odpověď, nebo žádným bodem za chybnou odpověď. Každá otázka byla správně zodpovězena aspoň jedním žákem a přitom aspoň dva žáci nezískali na závěr stejný počet bodů.

Dokažte, že existovala taková otázka, že žáci, kteří ji zodpověděli správně, dosáhli v průměru vyššího počtu bodů, než ti, kteří ji zodpověděli chybně.

Příklad T–5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$ a O je střed kružnice ω jemu opsané. Přímka AO protíná kružnici ω v dalším bodě D a přímku BC v bodě E. Kružnice opsaná trojúhelníku CDE protíná přímku CA v dalším bodě P. Přímka PE protíná přímku AB v bodě Q. Rovnoběžka s přímkou PE procházející bodem O protíná výšku trojúhelníku ABC z vrcholu A v bodě F.

Dokažte, že $|FP| = |FQ|$.

Příklad T–6

Nechť ABC je trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$. Středy jeho stran BC, CA, AB označme po řadě K, L, M. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC, která má střed I, se dotýká strany BC v bodě D. Přímka g procházející středem úsečky ID,která je kolmá k přímce IK, protíná přímku LM v bodě P.

Dokažte, že $|\measuredangle PIA| = 90^\circ$.

Příklad T–7

Přirozené číslo n nazveme *mozartovským*, právě když v posloupnosti čísel $1, 2, \ldots, n$ je každá číslice desítkové soustavy použita v sudém počtu. Dokažte tvrzení:

(a) Každé mozartovské číslo je sudé.

(b) Existuje nekonečně mnoho mozartovských čísel.

Příklad T–8

Uvažujme rovnici $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, kde a, b, c jsou přirozená čísla. Dokažte tvrzení:

(a) Pro $n = 2017$ neexistuje řešení (a, b, c).

(b) Pro $n = 2016$ je číslo a dělitelné třemi pro každé řešení (a, b, c).

(c) Pro $n = 2016$ má daná rovnice nekonečně mnoho řešení (a, b, c).