

Příklad T-1

Určete všechny trojice (a, b, c) reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}a^2 + ab + c &= 0, \\b^2 + bc + a &= 0, \\c^2 + ca + b &= 0.\end{aligned}$$

Příklad T-2

Nechť \mathbb{R} značí množinu reálných čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

platí pro všechna reálná čísla x a y .

Příklad T-3

Čtvercové území 8×8 , jehož strany jsou orientovány ve směrech sever–jih a východ–západ, je složena ze 64 parcel 1×1 . Na každé parcele může být postaven nejvýše jeden dům, jehož základy jsou shodné právě s touto parcelou.

Řekneme, že dům je ve *slunečním stínu*, právě když existují tři domy na parcelách bezprostředně s ním sousedících současně na východě, jihu i na západě.

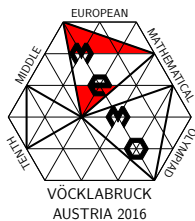
Jaký maximální počet domů lze současně postavit na daném čtvercovém území tak, aby žádný z nich nebyl ve slunečním stínu?

Poznámka. Domy na východní, jižní a západní straně celého území nejsou ve slunečním stínu.

Příklad T-4

Žáci střední školy psali test. Každá otázka byla hodnocena buď jedním bodem za správnou odpověď, nebo žádným bodem za chybnou odpověď. Každá otázka byla správně zodpovězena aspoň jedním žákem a přitom aspoň dva žáci nezískali na závěr stejný počet bodů.

Dokažte, že existovala taková otázka, že žáci, kteří ji zodpověděli správně, dosáhli v průměru vyššího počtu bodů, než ti, kteří ji zodpověděli chybně.



Příklad T-5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$ a O je střed kružnice ω jemu opsané. Přímka AO protíná kružnici ω v dalším bodě D a přímku BC v bodě E . Kružnice opsaná trojúhelníku CDE protíná přímku CA v dalším bodě P . Přímka PE protíná přímku AB v bodě Q . Rovnoběžka s přímkou PE procházející bodem O protíná výšku trojúhelníku ABC z vrcholu A v bodě F .

Dokažte, že $|FP| = |FQ|$.

Příklad T-6

Nechť ABC je trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$. Střed y jeho stran BC , CA , AB označme po řadě K , L , M . Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC , která má střed I , se dotýká strany BC v bodě D . Přímka g procházející středem úsečky ID , která je kolmá k přímce IK , protíná přímku LM v bodě P .

Dokažte, že $|\sphericalangle PIA| = 90^\circ$.

Příklad T-7

Přirozené číslo n nazveme *mozartovským*, právě když v posloupnosti čísel $1, 2, \dots, n$ je každá číslice desítkové soustavy použita v sudém počtu. Dokažte tvrzení:

- (a) Každé mozartovské číslo je sudé.
- (b) Existuje nekonečně mnoho mozartovských čísel.

Příklad T-8

Uvažujme rovnici $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, kde a, b, c jsou přirozená čísla. Dokažte tvrzení:

- (a) Pro $n = 2017$ neexistuje řešení (a, b, c) .
- (b) Pro $n = 2016$ je číslo a dělitelné třemi pro každé řešení (a, b, c) .
- (c) Pro $n = 2016$ má daná rovnice nekonečně mnoho řešení (a, b, c) .