

### Zadatak T–1

Odredite sve trojke  $(a, b, c)$  realnih brojeva koje zadovoljavaju sustav jednažbi

$$a^2 + ab + c = 0,$$

$$b^2 + bc + a = 0,$$

$$c^2 + ca + b = 0.$$

### Zadatak T–2

Neka  $\mathbb{R}$  označava skup realnih brojeva. Odredite sve funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

vrijedi za sve realne brojeve  $x$  i  $y$ .

### Zadatak T–3

Zemljište kvadratnog oblika dimenzija  $8 \times 8$ , čije su stranice orijentirane sjever–jug i istok–zapad, podijeljeno je na 64 manje kvadratne parcele dimenzija  $1 \times 1$ . Na svakoj od tih parcela može se nalaziti najviše jedna kuća. Svaka pojedina kuća može se nalaziti unutar samo jedne  $1 \times 1$  parcele.

Za kuću kažemo da je *u sjeni* ako se na svakoj od tri parcele koje su joj neposredno susjedne s istoka, zapada i juga nalazi po jedna kuća.

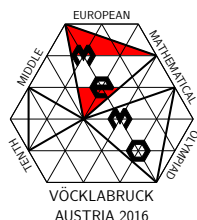
Odredite najveći broj kuća koje se istovremeno mogu nalaziti na zemljištu, a da pritom niti jedna nije u sjeni.

Napomena: Po definiciji, kuće na istočnom, zapadnom i južnom rubu zemljišta nikada nisu u sjeni.

### Zadatak T–4

Učenici nekog srednjoškolskog razreda pisali su ispit. Na svakom pitanju mogao se dobiti ili 1 bod za točan odgovor, ili 0 bodova za netočan odgovor. Poznato je da je na svako pitanje točno odgovorio barem jedan učenik te da nisu svi učenici ostvarili jednak ukupni rezultat na ispitu.

Dokažite da na testu postoji pitanje sa sljedećim svojstvom: Prosjek ukupnih rezultata učenika koji su na to pitanje odgovorili točno je veći od prosjeka ukupnih rezultata onih učenika koji su na njega odgovorili netočno.



**Zadatak T–5**

Neka je  $ABC$  šiljastokutni trokut u kojem je  $|AB| \neq |AC|$ , te neka mu je  $O$  središte opisane kružnice. Pravac  $AO$  siječe kružnicu  $\omega$  opisanu trokutu  $ABC$  drugi put u točki  $D$ , a pravac  $BC$  u točki  $E$ . Kružnica opisana trokutu  $CDE$  siječe pravac  $CA$  drugi put u točki  $P$ . Pravac  $PE$  siječe pravac  $AB$  u točki  $Q$ . Pravac kroz  $O$  paralelan pravcu  $PE$  siječe visinu trokuta  $ABC$  koja prolazi kroz  $A$  u točki  $F$ .

Dokažite da je  $|FP| = |FQ|$ .

**Zadatak T–6**

Neka je  $ABC$  trokut u kojem je  $|AB| \neq |AC|$ . Točke  $K, L, M$  su polovišta stranica  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ , redom. Kružnica upisana trokutu  $ABC$  sa središtem  $I$  dira stranicu  $\overline{BC}$  u točki  $D$ . Pravac  $g$ , koji prolazi polovištem dužine  $\overline{ID}$  i okomit je na  $IK$ , siječe pravac  $LM$  u točki  $P$ .

Dokažite da je  $\sphericalangle PIA = 90^\circ$ .

**Zadatak T–7**

Kažemo da je prirodan broj  $n$  *Mozartov broj* ako je za zapis niza brojeva  $1, 2, \dots, n$  (u dekadskom sustavu) svaku znamenku potrebno napisati paran broj puta.

Dokažite:

- (a) Svi Mozartovi brojevi su parni.
- (b) Postoji beskonačno mnogo Mozartovih brojeva.

**Zadatak T–8**

Promatramo jednadžbu  $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$ , pri čemu su  $a, b, c$  prirodni brojevi.

Dokažite:

- (a) Ne postoji rješenje  $(a, b, c)$  za  $n = 2017$ .
- (b) Za  $n = 2016$ ,  $a$  mora biti djeljiv s 3 za svako rješenje  $(a, b, c)$ .
- (c) Jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja  $(a, b, c)$  za  $n = 2016$ .