Zadatak T–1

Odredite sve trojke (a, b, c) realnih brojeva koje zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} a^2 + ab + c &= 0, \\ b^2 + bc + a &= 0, \\ c^2 + ca + b &= 0. \end{aligned}$$

Zadatak T–2

Neka $\mathbb{R}$ označava skup realnih brojeva. Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da

$$f(x)f(y) = xf(f(y - x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

vrijedi za sve realne brojeve x i y.

Zadatak T–3

Zemljište kvadratnog oblika dimenzija 8×8, čije su stranice orijentirane sjever–jug i istok–zapad, podijeljeno je na 64 manje kvadratne parcele dimenzija 1×1. Na svakoj od tih parcela može se nalaziti najviše jedna kuća. Svaka pojedina kuća može se nalaziti unutar samo jedne 1×1 parcele.

Za kuću kažemo da je *u sjeni* ako se na svakoj od tri parcele koje su joj neposredno susjedne s istoka, zapada i juga nalazi po jedna kuća.

Odredite najveći broj kuća koje se istovremeno mogu nalaziti na zemljištu, a da pritom niti jedna nije u sjeni.

Napomena: Po definiciji, kuće na istočnom, zapadnom i južnom rubu zemljišta nikada nisu u sjeni.

Zadatak T–4

Učenici nekog srednjoškolskog razreda pisali su ispit. Na svakom pitanju mogao se dobiti ili 1 bod za točan odgovor, ili 0 bodova za netočan odgovor. Poznato je da je na svako pitanje točno odgovorio barem jedan učenik te da nisu svi učenici ostvarili jednak ukupni rezultat na ispitu.

Dokažite da na testu postoji pitanje sa sljedećim svojstvom: Prosjek ukupnih rezultata učenika koji su na to pitanje odgovorili točno je veći od prosjeka ukupnih rezultata onih učenika koji su na njega odgovorili netočno.

Vrijeme: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.

Zadatak T–5

Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| \neq |AC|$, te neka mu je O središte opisane kružnice. Pravac AO siječe kružnicu ω opisanu trokutu ABC drugi put u točki D, a pravac BC u točki E. Kružnica opisana trokutu CDE siječe pravac CA drugi put u točki P. Pravac PE siječe pravac AB u točki Q. Pravac kroz O paralelan pravcu PE siječe visinu trokuta ABC koja prolazi kroz A u točki F.

Dokažite da je $|FP| = |FQ|$.

Zadatak T–6

Neka je ABC trokut u kojem je $|AB| \neq |AC|$. Točke K, L, M su polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, redom. Kružnica upisana trokutu ABC sa središtem I dira stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pravac g, koji prolazi polovištem dužine $\overline{ID}$ i okomit je na IK, siječe pravac LM u točki P.

Dokažite da je $\measuredangle PIA = 90^\circ$.

Zadatak T–7

Kažemo da je prirodan broj n *Mozartov broj* ako je za zapis niza brojeva $1, 2, \ldots, n$ (u dekadskom sustavu) svaku znamenku potrebno napisati paran broj puta.

Dokažite:

(a) Svi Mozartovi brojevi su parni.

(b) Postoji beskonačno mnogo Mozartovih brojeva.

Zadatak T–8

Promatramo jednadžbu $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, pri čemu su a, b, c prirodni brojevi.

Dokažite:

(a) Ne postoji rješenje (a, b, c) za $n = 2017$.

(b) Za $n = 2016$, a mora biti djeljiv s 3 za svako rješenje (a, b, c).

(c) Jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja (a, b, c) za $n = 2016$.

Vrijeme: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.