Naloga I–1

Naj bo $n \geqslant 2$ naravno število in naj bodo $x_1, x_2, \dots, x_n$ realna števila, ki zadoščajo

(a) $x_j > -1$ za $j = 1, 2, \dots, n$ in

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$.

Dokaži neenakost

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

in določi, kdaj velja enakost.

Naloga I–2

Na tabli je napisanih $n \geqslant 3$ naravnih števil. V enem koraku s table izberemo tri števila a, b, c, ki so dolžine stranic neizrojenega neenakostraničnega trikotnika, in jih zamenjamo z $a + b - c$, $b + c - a$ in $c + a - b$.

Dokaži, da ne obstaja neskončno zaporedje takih korakov.

Naloga I–3

Naj bo ABC ostrokoten trikotnik z $\measuredangle BAC > 45^\circ$ in O središče njemu očrtane krožnice. V njegovi notranjosti leži taka točka P, da točke A, P, O, B ležijo na isti krožnici in je premica BP pravokotna na premico CP. Na daljici BP leži taka točka Q, da je premica AQ vzporedna premici PO.

Dokaži, da velja $\measuredangle QCB = \measuredangle PCO$.

Naloga I–4

Poišči vse funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, za katere $f(a) + f(b)$ deli $2(a + b - 1)$ za vse $a, b \in \mathbb{N}$.

Opomba: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ označuje množico naravnih števil.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.