Individuálna súťaž
24. August 2016

Slovak version

Úloha I–1

Nech $n \geqslant 2$ je kladné celé číslo a x_1, x_2, $\ldots$, x_n sú reálne čísla spĺňajúce obidve podmienky

(a) $x_j > -1$ for $j = 1, 2, \ldots, n$

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$.

Dokážte nerovnosť

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

a určte kedy nastáva rovnosť.

Úloha I–2

Majme na tabuli napísaných $n \geqslant 3$ kladných celých čísel. Ťah pozostáva z výberu troch čísel a, b, c napísaných na tabuli, ktoré sú stranami nedegenerovaného nerovnostranného trojuholníka, a nahradením ich číslami $a + b - c$, $b + c - a$ a $c + a - b$.

Dokážte, že nemôže existovať nekonečná postupnosť takýchto ťahov.

Úloha I–3

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|\measuredangle BAC| > 45^\circ$ a stredom opísanej kružnice O. Bod P leží v jeho vnútri tak, že body A, P, O, B ležia na kružnici a BP je kolmé na CP. Bod Q leží na úsečke BP tak, že AQ je rovnobežné s PO.

Dokážte, že $|\measuredangle QCB| = |\measuredangle PCO|$.

Úloha I–4

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(a) + f(b)$ delí $2(a + b - 1)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$.

Poznámka: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ je množina kladných celých čísel.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.