Zadanie I–1

Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą i niech $x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunki:

(a) $x_j > -1$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$,

(b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Wykazać, że

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1 + x_j^2}$$

oraz rozstrzygnąć, kiedy w powyższej nierówności zachodzi równość.

Zadanie I–2

Na tablicy napisano $n \geqslant 3$ dodatnich liczb całkowitych. Ruch polega na wybraniu trzech liczb a, b, c napisanych na tablicy takich, że są bokami niezdegenerowanego trójkąta nierównobocznego i zastąpieniu ich liczbami $a + b - c$, $b + c - a$ i $c + a - b$.

Udowodnić, że nie istnieje nieskończony ciąg ruchów.

Zadanie I–3

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\measuredangle BAC > 45°$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym punkty A, P, O, B leżą na okręgu oraz proste BP i CP są prostopadłe. Punkt Q leży na odcinku BP, przy czym proste AQ i PO są równoległe.

Udowodnić, że $\measuredangle QCB = \measuredangle PCO$.

Zadanie I–4

Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że liczba $f(a) + f(b)$ jest dzielnikiem liczby $2(a + b - 1)$ dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{N}$.

Uwaga: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.