Užduotis I–1

Natūralusis skaičius $n \geqslant 2$ ir realieji skaičiai x_1, x_2, ..., x_n tenkina sąlygas:

(a) $x_j > -1$, kai $j = 1$, 2, ..., n;

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$.

Įrodykite nelygybę

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

ir nustatykite, kada ji virsta lygybe.

Užduotis I–2

Lentoje parašyta $n \geqslant 3$ natūraliųjų skaičių. Ėjimo metu pasirenkami trys lentoje užrašyti skaičiai a, b, c, lygūs neišsigimusio nelygiakraščio trikampio kraštinių ilgiams, ir vietoj jų parašomi skaičiai $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$.

Įrodykite, kad begalinė ėjimų seka yra negalima.

Užduotis I–3

Smailiojo trikampio ABC su kampu $\measuredangle BAC > 45^\circ$ apibrėžtinio apskritimo centras pažymėtas O.

Trikampio viduje pažymėtas toks taškas P, kad taškai A, P, O, B priklauso vienam apskritimui, o tiesės BP ir CP statmenos. Atkarpoje BP pažymėtas toks taškas Q, kad tiesės AQ ir PO lygiagrečios.

Įrodykite, kad $\measuredangle QCB = \measuredangle PCO$.

Užduotis I–4

Raskite visas tokias funkcijas $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kad $f(a) + f(b)$ dalija $2(a + b - 1)$ bet kuriems a, $b \in \mathbb{N}$.

Pastaba: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ yra natūraliųjų skaičių aibė.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.