I–1. Feladat

Legyen $n \geqslant 2$ egész szám, és legyenek x_1, x_2, …, x_n olyan valós számok, melyekre teljesül, hogy

(a) $x_j > -1$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén; valamint

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$.

Bizonyítsd be, hogy teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

Mikor áll fent egyenlőség?

I–2. Feladat

Egy táblára felírtunk $n \geqslant 3$ pozitív egész számot. Egy lépés abból áll, hogy kiválasztunk három számot a tábláról – mondjuk a, b, c-t – úgy, hogy azok egy háromszög oldalai legyenek, mely nem elfajuló és nem szabályos, majd lecseréljük őket az $a + b - c$, $b + c - a$ és $c + a - b$ számokra.

Mutasd meg, hogy nem létezik végtelen sok lépésből álló sorozat.

I–3. Feladat

Legyen ABC olyan hegyesszögű háromszög, melyre $BAC\sphericalangle > 45°$, jelölje O a körülírt körének középpontját. A háromszög P belső pontja olyan, hogy az A, P, O, B pontok egy körre illeszkednek és BP merőleges CP-re. A BP szakasz Q pontjára teljesül, hogy AQ párhuzamos PO-val.

Bizonyítsd be, hogy $QCB\sphericalangle = PCO\sphericalangle$.

I–4. Feladat

Határozd meg az összes olyan $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ függvényt, melyre $f(a) + f(b)$ osztja a $2(a + b - 1)$ értéket minden $a, b \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Megjegyzés: $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a pozitív egész számok halmazát jelöli.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.