Aufgabe I–1

Seien $n \geqslant 2$ eine ganze Zahl und x_1, x_2, …, x_n reelle Zahlen mit

(a) $x_j > -1$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ und
(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$.

Zeige die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

und bestimme, wann Gleichheit gilt.

Aufgabe I–2

Auf einer Tafel stehen $n \geqslant 3$ positive ganze Zahlen. Ein Zug besteht darin, drei Zahlen a, b, c auf der Tafel auszuwählen, die die drei Seitenlängen eines nicht-degenerierten (d.h. nicht-entarteten) und nicht-gleichseitigen Dreiecks sind, und diese durch $a+b-c$, $b+c-a$ und $c+a-b$ zu ersetzen.

Zeige, dass es keine unendliche Folge solcher Züge geben kann.

Aufgabe I–3

Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $\measuredangle BAC > 45^\circ$ und Umkreismittelpunkt O. Der Punkt P liege derart im Inneren des Dreiecks, dass die Punkte A, P, O, B auf einem Kreis liegen und BP senkrecht auf CP steht. Der Punkt Q liege auf der Strecke BP, sodass AQ parallel zu PO ist.

Zeige $\measuredangle QCB = \measuredangle PCO$.

Aufgabe I–4

Bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ der Wert $f(a) + f(b)$ ein Teiler von $2(a+b-1)$ ist.

Bemerkung: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Juryanfragen: 60 min
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.