Problème I–1

Soit $n \geqslant 2$ un entier et soient x_1, x_2, …, x_n des nombres réels vérifiant

(a) $x_j > -1$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$ et

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$.

Prouver l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

et décider quand on a égalité.

Problème I–2

Sur un tableau noir sont écrits $n \geqslant 3$ entiers strictement positifs. A chaque étape, on choisit sur le tableau trois nombres a, b, c formant les côtés d'un triangle non-dégénéré et non équilatéral et on les remplace par les nombres $a+b-c$, $b+c-a$ et $c+a-b$.

Prouver qu'on ne peut pas continuer ce processus indéfiniment.

Problème I–3

Soit ABC un triangle aigu avec $\measuredangle BAC > 45^\circ$ et soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit P le point à l'intérieur du triangle vérifiant simultanément que les points A, P, O, B sont cocycliques et que BP est perpendiculaire à CP. Soit Q l'intersection du segment BP avec la parallèle à PO passant par A.

Prouver que $\measuredangle QCB = \measuredangle PCO$.

Problème I–4

Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(a)+f(b)$ divise $2(a+b-1)$ pour tous $a, b \in \mathbb{N}$.

Remarque : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.

Durée: 5 heures
Temps pour les questions: 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.