Individual Competition
August 24, 2016

Czech version

Příklad I–1

Nechť $n \geqslant 2$ je přirozené číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou reálná čísla splňující současně podmínky

(a) $x_j > -1$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$,

(b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Dokažte nerovnost

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

a určete, kdy nastane rovnost.

Příklad I–2

Na tabuli je napsáno n ($n \geqslant 3$) přirozených čísel. V jednom kroku vybereme na tabuli tři čísla a, b, c, která jsou délkami stran nedegenerovaného, nerovnostranného trojúhelníku, a nahradíme je čísly $a+b-c$, $b+c-a$ a $c+a-b$.

Dokažte, že neexistuje nekonečná posloupnost těchto kroků.

Příklad I–3

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž $|\measuredangle BAC| > 45^\circ$ a O značí střed kružnice jemu opsané. Bod P je takovým vnitřním bodem tohoto trojúhelníku, že body A, P, O, B leží na téže kružnici a přímka BP je kolmá k CP. Bod Q je takovým bodem úsečky BP, že přímka AQ je rovnoběžná s PO. Dokažte, že $|\measuredangle QCB| = |\measuredangle PCO|$.

Příklad I–4

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ je číslo $2(a+b-1)$ dělitelné číslem $f(a) + f(b)$.

Poznámka: Symbol $\mathbb{N}$ značí množinu všech přirozených čísel, tj. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Time: 5 hours
Time for questions: 60 min
Each problem is worth 8 points.
The order of the problems does not depend on their difficulty.