Zadatak I–1

Neka je $n \geqslant 2$ prirodni broj, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi za koje vrijedi

(a) $x_j > -1$ za $j = 1, 2, \ldots, n$ i

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$.

Dokaži nejednakost

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

i odredi kada se postiže jednakost.

Zadatak I–2

Na ploči je napisano $n \geqslant 3$ prirodnih brojeva. Potez se sastoji od odabira triju brojeva a, b, c s ploče koji predstavljaju duljine stranica nedegeneriranog nejednakostraničnog trokuta i zamjene tih brojeva s $a+b-c$, $b+c-a$ i $c+a-b$.

Dokaži da ne može postojati beskonačni niz takvih poteza.

Zadatak I–3

Neka je ABC šiljastokutni trokut takav da $\measuredangle BAC > 45^\circ$ sa središtem opisane kružnice O. Točka P leži u njegovoj unutrašnjosti tako da A, P, O, B leže na istoj kružnici i tako da je pravac BP okomit na pravac CP. Točka Q leži na dužini $\overline{BP}$ tako da je pravac AQ paralelan pravcu PO.

Dokaži da je $\measuredangle QCB = \measuredangle PCO$.

Zadatak I–4

Nađi sve funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da $f(a) + f(b)$ dijeli $2(a+b-1)$ za sve $a, b \in \mathbb{N}$.

Napomena: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ označava skup prirodnih brojeva.

Vrijeme: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.